

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ПРИДНІПРОВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ



підпис

СТАРУШЕНКО ГАЛИНА АРКАДІВНА

УДК 624.016:539.3

**АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ
В МЕХАНІЦІ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ**

05.23.17 – будівельна механіка

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дніпро – 2024

Дисертацією є сукупність статей.

Робота виконана самостійно в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка» Міністерства освіти і науки України.

Опоненти:

доктор технічних наук, професор **Марчук Олександр Васильович**, Національний транспортний університет, завідувач кафедри опору матеріалів і машинознавства;

доктор технічних наук, професор **Курпа Лідія Василівна**, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, професор **Лобода Володимир Васильович**, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, завідувач кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки.

Захист відбудеться 14 червня 2024 р. о 12³⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.085.02 з присудження наукового ступеня доктора наук при Придніпровській державній академії будівництва та архітектури за адресою: 49005, м. Дніпро, вул. Архітектора Олега ПЕТРОВА, 24а, ауд. 202.

З дисертацією у вигляді наукової доповіді можна ознайомитись у бібліотеці Придніпровської державної академії будівництва та архітектури (м. Дніпро, вул. Архітектора Олега ПЕТРОВА, 24а) та на сайті: <https://pgasa.dp.ua/dissertation/>.

Реферат розіслано 10 травня 2024 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
Д 08.085.02 д.т.н., проф.



підпис

Сергій СЛОБОДЯНЮК

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДИСЕРТАЦІЇ

Сутність науково-прикладної проблеми, що розглядається в дисертаційній роботі, полягає в побудові асимптотичних моделей і розробці математичних методів, що дозволяють коректно описувати композити різної структури та фізичні процеси, що відбуваються в них, обчислювати ефективні характеристики композитних матеріалів в області граничних значень їх фізичних і геометричних параметрів, будувати моделі континуальної апроксимації дискретних систем для обґрунтованого представлення особливостей розв'язку дискретних задач неперервними функціями.

Обґрунтування вибору теми дослідження. Механіка композитних матеріалів є галуззю знання, що швидко розвивається, у всіх аспектах – чи то теоретичні дослідження, експериментальні досліди або практичні застосування. Це зумовлено сучасними вимогами науково-технічного прогресу: використанням у всіх галузях техніки складних складових конструкцій, які повинні поєднувати легкість із високою міцністю, застосуванням інноваційних виробничих технологій, створенням нових композитних матеріалів. Саме цими факторами обумовлено в сучасний час повсюдне застосування композитних матеріалів і конструкцій практично у всіх галузях техніки: авіа- і ракетобудуванні, будівництві, приладобудуванні, при виробництві товарів побутової техніки, медичного обладнання, спортивної промисловості тощо.

Особливу роль відіграють композитні матеріали у будівельній індустрії:

- використання композитів забезпечує важливі для будівельних конструкцій переваги – міцність, довговічність та корозійну стійкість. Це робить композити незамінними при будівництві мостів, морських споруд, залізничних платформ, інженерних опор, систем водопостачання та багато іншого;

- композиційні матеріали використовують для армування бетону. Створені на основі армувальних наповнювачів зі скловолокна, композитні матеріали застосовують при виготовленні несущих конструкцій, тим самим забезпечуючи їм необхідний запас міцності. Використання епоксидного сполучного дозволяє досягти високих механічних характеристик конструкцій;

- куполи та дахи на основі композиційних матеріалів міцніші за традиційні та забезпечують економію ваги до 85%. Досвід їх виготовлення показує, що використання композитних матеріалів призводить до здешевлення будівництва та збільшення його швидкості, простоти виготовлення та монтажу виробів: підйом та встановлення композитних куполів набагато простіше, ніж зі стандартних металевих конструкцій, а зручність та можливості ремонту значно вищі. Крім того, конструкції з композитів не схильні до корозії й більш стійкі до впливу зовнішнього середовища;

- важливою перевагою композитних матеріалів у порівнянні з класичними рішеннями є можливість виготовлення нових дизайнерських конструкцій, які при виробництві з металу і бетону будуть надто важкими та невиправдано дорогими. Композит добре піддається фарбуванню і за видовими параметрами нічим не поступається конструкціям з металу;

- полімерні композити виготовляються різними способами: литтям під тиском або вільним литтям, пресуванням, екструзією, з використанням намотувальних технологій, на основі препрегів і т. і. Але в усіх випадках характерним

для полімерів є те, що виріб і матеріал виходять в єдиному процесі. Тому завдання, що виникають при розробці технології виготовлення полімерних матеріалів, безпосередньо пов'язані із задачами розрахунку характеристик міцності самих композитів і виготовлених з них конструкцій.

Таким чином, значна структурна відмінність композитних матеріалів як із точки зору їх фізичних властивостей, так і за геометричною структурою, найширший спектр їх практичного застосування, особливості виробничих технологій визначають різноманіття та складність наукових проблем, що виникають у будівельній механіці та механіці композитів, дослідження яких є актуальною науковою проблемою, що потребує глибокого осмислення на фізичному рівні, фундаментального теоретичного обґрунтування та строгого математичного розв'язання.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами:

1) Дисертаційне дослідження виконувалося згідно з чинним законодавством України в галузі архітектури та містобудування, нормативною базою будівництва, стратегією регіонального розвитку України, що забезпечують державну підтримку наукових досліджень і впровадження фундаментальних наукових знань у галузі містобудування, архітектури й будівництва (Закон України № 687-XIV у редакції від 31 березня 2023 р. «Про архітектурну діяльність») та визначають фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України як пріоритетні напрями розвитку науки і техніки (Закон України № 2623-III у редакції від 13 січня 2024 р. «Про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки»).

Зокрема, йдеться про дослідження в галузі створення нових матеріалів з покращеними теплопровідними, електропровідними, оптичними, магнітними, та іншими функціональними характеристиками для різних видів новітньої техніки, створення нових матеріалів та композитів на їх основі, включаючи композити з двовимірними структурами, для потреб сучасної нано- і мікроелектроніки, електротехніки, альтернативної енергетики й енергозбереження, транспорту. Надважливим завданням у сучасних реаліях є створення нових композиційних матеріалів для літальних апаратів і лопатей вертольотів, для авіаційних двигунів – на основі надтвердих матеріалів, зміцнених жароміцними сплавами, розроблення надлегких алюмоматричних композитів для військових потреб, композитних матеріалів для використання в екстремальних умовах (Постанова Кабінету Міністрів України № 980 у редакції від 22 грудня 2023 р. «Деякі питання визначення середньострокових пріоритетних напрямів інноваційної діяльності галузевого рівня на 2023 рік»).

2) Проект Національного Наукового Центру Польщі. Research grant OPUS 14 N. 2017/27/B/ST8/01330, Lodz University of Technology, Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics; співвиконавець.

3) Грант Фонду Саймонса (США). Award ID: 1160642, Project Title: “Simons Foundation Support to Researchers in Ukraine”, Program: “Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants”; головний дослідник.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи полягає в побудові, математичному описі та фізичному обґрунтуванні асимптотичних моделей композитів різної структури, розвитку аналітичних методів для їх фундаментального

теоретичного представлення та оцінки меж застосування теорій, на підставі яких вони розроблені.

Завдання дослідження:

- 1) Провести узагальнення трифазної моделі композиту з урахуванням форми включення.
- 2) Отримати асимптотичні наближення трифазної моделі композиту, що розширюють область її застосування.
- 3) Знайти асимптотичні розв'язки для високопровідних щільно упакованих композитів на основі теорії змазки.
- 4) З використанням апарату асимптотично еквівалентних функцій провести дослідження граничних станів композитних структур.
- 5) Провести аналіз умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.
- 6) Побудувати вищі наближення формули Максвелла.
- 7) Обґрунтувати застосування техніки негладкого пилкоподібного перетворення аргументу до розв'язку задач механіки періодичної структури.
- 8) Дослідити моделі континуальної апроксимації дискретних систем.

Об'єкт дослідження – процес аналітичних досліджень у сфері механіки композитів щодо строгого математичного обґрунтування асимптотичних методів опису й аналізу макроскопічних властивостей гетерогенних середовищ та побудови розрахункових моделей для композитних матеріалів різної структури.

Предмет дослідження – асимптотичні методи та моделі в механіці композитних матеріалів.

Методи дослідження:

- для узагальнення трифазної моделі композиту з урахуванням форми включення використовувався метод збурення форми межі у поєднанні з теорією осереднення та технікою двохмасштабних розкладень; метод збурення форми межі застосовувався також для апроксимації квадратного контуру включення при розробці двофазної моделі композиту;
- у рамках методу асимптотичної гомогенізації здійснювалась побудова наближень вищих порядків при дослідженні власних коливань мембрани з гексагональним масивом круглих включень;
- з використанням перетворення Лапласа та методу осереднення було досліджено нестационарну теплопровідність у волокнистих композитних матеріалах гексагональної структури;
- апарат апроксимацій Паде використовувався для розширення області застосування трифазної моделі композиту з круглими включеннями, при побудові двосторонніх оцінок асимптотики ефективного параметра для композита гексагональної структури, дослідженні моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів, апроксимації функції Гріна решітки Лагранжа неперервними аналогами, при побудові континуальної моделі рівняння Ферхюльста з хаотичною поведінкою;
- методи двох- і триточкових інтерполяцій Паде та зрощування Паде-апроксимацій використовувалися при побудові уточнювальних співвідношень

формули Максвелла;

- наближення теорії змазки (асимптотики тонкого шару) застосовувалися при розв'язку локальних задач для волокнистих композитів з різною структурою та формою включень;
- математичний опис модифікованої трифазної моделі композиту виконувався за допомогою методу теорії змазки в поєднанні з аналітичним алгоритмом трифазної моделі;
- метод зрощування асимптотичних розкладень використовувався для визначення ефективного коефіцієнта теплопровідності композитного масиву з циліндричними включеннями квадратного профілю;
- апарат асимптотично еквівалентних функцій застосовувався у дослідженні граничних станів композитних структур із квадратними та гексагональними решітками включень;
- аналіз умов контакту «матриця – включення» у композитних структурах за наявності тонкого прошарку на межі розділу фаз проводився за допомогою методу асимптотично еквівалентних функцій, визначених у термінах τ -перетворення;
- метод послідовних наближень (альтернуючий метод) Шварца використовувався при уточненні формули Максвелла на основі двофазної моделі композиту;
- при побудові вищих наближень формули Максвелла для композитів з круглими та квадратними включеннями застосовувався спосіб знаходження розв'язку в рядах;
- техніка негладкого пилкоподібного перетворення аргументу застосовувалася до розв'язку періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів та в дослідженні нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні;
- при дослідженні нестационарного теплообміну в композитній мембрані застосовувався математичний апарат перетворення Лапласу та метод асимптотичної гомогенізації;
- апарат теорії функцій комплексної змінної використовувався при аналізі поняття зосередженої сили в теорії пружності;
- чисельні методи використовувалися при аналізі результатів моделювання поширення хвиль у неперервному середовищі та дослідженні хаосу у неперервній моделі логістичного рівняння. Зокрема, чисельне інтегрування для розв'язку задачі Коші виконувалося методом Адамса – Башфорта – Моултона (метод предиктора-коректора).

Наукова новизна отриманих результатів:

1) Вперше на основі теорії осереднення, трифазної моделі композиту та методу збурення форми межі одержано визначальні співвідношення для ефективної теплопровідності композитного матеріалу, армованого волокнами круглого профілю, з урахуванням форми включень [8]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що знайдено розв'язок, який дозволяє враховувати геометрію включень, а не лише їх концентрацію. Побудовано єдиний аналітичний вираз ефективної провідності у всьому діапазоні доперколяційних значень розміру

включень до порога протікання.

2) Вперше з використанням методу збурення форми межі проведено узагальнення трифазної моделі для композитів із квадратними циліндричними включеннями [5]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що отриманий вираз приведенного параметра теплопровідності ураховує форму включень і коректно працює в усьому діапазоні зміни геометричного розміру включень та їх фізичної характеристики, включаючи граничні випадки.

3) Дістали подальший розвиток методи дослідження ефективної теплопровідності композитного матеріалу з циліндричними включеннями квадратного профілю на основі теорії змазки [1]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що знайдено розв'язок задачі й отримано асимптотичне співвідношення, що характеризує стан ефективного гомогенного середовища у випадку щільно упакованих висококонтрастних композитів.

4) Вперше обґрунтовано доцільність використання апарату апроксимацій Паде щодо розширення області застосування трифазної моделі для волокнистого композиту з круглими включеннями [9]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в знаходженні розв'язку, який дозволяє не тільки принципово розширити кількісні межі застосування трифазної моделі, а й якісно описати фізичний процес, що відбувається в композиті при великих розмірах включень гранично великої провідності – перколяційний перехід та утворення нескінченного кластеру.

5) Вперше побудовано модифіковану трифазну модель композиту [6]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що проведеним асимптотичним і чисельним аналізом доведено адекватність моделі при всіх значеннях фізико-геометричних характеристик композита, включаючи асимптотичні співвідношення в граничних випадках.

6) Вперше на основі техніки Паде-апроксимацій для асимптотичного виразу ефективного параметра композита гексагональної структури визначені двосторонні оцінки з більш вузькою «вилкою», ніж межі Хашина – Штрікмана, при будь-яких значеннях розміру включень [21]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в узагальненні підходу теорії змазки для включень середніх розмірів та отриманні двосторонніх оцінок ефективного параметра з використанням апарату апроксимацій Паде.

7) Вперше досліджено власні коливання мембрани з гексагональним масивом круглих включень на основі аналітичних співвідношень теорії осереднення [11]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що в загальному вигляді представлені аналітичні вирази власних функцій і частот коливань та перших поправок до них; показано, за яких умов буде отримано ненульову першу поправку власної частоти.

8) Дістало подальший розвиток дослідження нестационарного теплообміну в композитній мембрані гексагональної структури з круглими включеннями [20]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає у використанні перетворення Лапласа та методу асимптотичної гомогенізації для знаходження визначальних аналітичних співвідношень та визначенні виразу ефективної теплопровідності у замкнутій формі.

9) Вперше запропоновано застосування методу пилкоподібного

перетворення аргументу у поєднанні з методом асимптотично еквівалентних функцій для математичного опису моделей композитів з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз; побудовано асимптотичні моделі для щільно упакованих ідеально провідних та непровідних композитів із квадратною сіткою круглих включень за різних умов контакту фаз [12]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в розробці й обґрунтовані математичного апарату на основі τ -перетворення аргументу і методу асимптотично еквівалентних функцій для аналізу умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

10) Вперше проаналізовано поняття фізичної еквівалентності композитних структур; проведено класифікацію та знайдено відповідні асимптотичні вирази ефективних параметрів композитів різної структури за умовами контакту «матриця – включення»: по матеріалу матриці; по матеріалу включень; при наявності тонкого прошарку на межі розділу фаз; за методом несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу в поєднанні з математичним апаратом асимптотично еквівалентних функцій і теорією змазки побудовано асимптотичні моделі для композитів із квадратною сіткою криволінійних ромбічних включень і гексагональним масивом круглих включень, включаючи випадок інтерфейсу на межі розділу фаз [13]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що використання математичного апарату негладкого перетворення аргументу та асимптотично еквівалентних функцій дало можливість врахувати локальні ефекти на межі розділу фаз композиту, які неможливо описати безпосередньо в рамках теорії осереднення, що з фізичної точки зору дозволило значно розширити клас аналізованих структур композитів за єдиним запропонованим підходом.

11) Вперше шляхом зрощування асимптотичних співвідношень одержано аналітичний вираз для ефективної теплопровідності композиту з циліндричними включеннями, квадратними в перерізі [7]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що шляхом поетапного зрощування асимптотичних співвідношень за розміром і провідністю включень побудовано єдиний аналітичний вираз приведенного коефіцієнта та визначено і візуально проілюстровано області зміни параметрів композиту, в яких його значення значуще визначається відповідними асимптотичними розв'язками.

12) Вперше запропоновано двофазну модель композиту та проведено асимптотичний аналіз формули Максвелла на її основі [10]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в побудові двофазної моделі композиту для апроксимації квадратного контуру включення, визначенні сутності такої ідеалізації й послідовного уточнення форми включення за методом збурення форми межі при асимптотичному аналізі формули Максвелла.

13) Вперше з використанням альтернуючого методу Шварца побудовані вищі наближення формули Максвелла для композитів, армованих волокнами круглого профілю [15]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в доведенні, що головна частина асимптотичного розкладення ефективного параметра при малих розмірах включень співпадає з формулою Максвелла, і визначенні порядку її першої ненульової поправки.

14) Вперше із застосуванням математичного апарату апроксимацій Паде уточнено формулу Максвелла для волокнистих композитів із круглими включеннями

[16]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в розробці й доведенні ефективності методу перебудови ітераційного розв'язку, за яким визначаються «пряма» і «зворотна» складові – Паде-апроксимації за розміром включення, що надалі зрощуються в триточкову апроксимацію Паде за провідністю включень.

15) Дістало подальший розвиток дослідження асимптотичного осереднення вищого порядку для динамічних задач [18]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в побудові наближень вищого порядку для неоднорідної системи з неперервними параметрами, системи з періодично сконцентрованими дискретними елементами та 1D кусково-неперервної системи.

16) Вперше застосована техніка косокутного τ -перетворення аргументу до розв'язку періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів; встановлено умови самоурівноваженості масових сил на періоді; визначено умову виключення з періодичного розв'язку середньої складової; знайдені асимптотичні співвідношення в граничних випадках жорсткісних та геометричних характеристик фаз композиту [3]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в розробці математичного апарату для розв'язку періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів на основі техніки негладкого косокутного пилкоподібного перетворення аргументу.

17) Вперше з використанням τ -перетворення за часом проведено дослідження нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні [2]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає у застосуванні τ -перетворення часової змінної та розробці процедури зведення розв'язку вихідного рівняння до розв'язку в області комірки крайової задачі, що не містить сингулярних функцій.

18) Дістало подальший розвиток чисельне дослідження моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів [4]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в проведенні чисельного дослідження моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів: класичної континуальної апроксимації, проміжної континуальної моделі, квазіконтинуальної апроксимації й уточненої квазіконтинуальної моделі.

19) Дістало подальший розвиток дослідження асимптотичного характеру хвиль при переході від дискретного до неперервного середовища; проведено аналіз різних неперервних наближень для дискретної моделі – решітки Лагранжа [17]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в доведенні близької відповідності розв'язку, що описує хвильовий рух дискретної решітки, та розв'язку за неперервною моделлю, побудованою з використанням апроксимацій Паде.

20) Дістало подальший розвиток використання апарату двохточкових апроксимацій Паде для побудови функції Гріна решітки Лагранжа й коректного опису основних особливостей розв'язку дискретних задач неперервними функціями [19]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що показано значне покращення неперервної апроксимації функції Гріна, побудованої з використанням апарату двохточкових апроксимацій Паде, порівняно з класичним неперервним наближенням, яке дає задовільні результати лише для низьких частот.

21) Вперше доведено наявність хаосу в континуальній моделі рівняння Ферхюльста, побудованій з використанням апроксимації Паде; наявність хаосу в

системі підтверджено побудовою фазової траєкторії, перетину Пуанкаре та траєкторій у тривимірному просторі, розрахунком показників Ляпунова і розмірностей Ляпунова [14]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що розроблено процедуру континуалізації дискретного логістичного рівняння з хаотичним поведінкою шляхом перетворення диференціального оператора на діагональну апроксимацію Паде.

Теоретичне значення роботи:

1) Проведене дослідження охоплює широкий клас композитів різної структури, з різними фізичними та геометричними характеристиками включень, для яких з використанням строгого математичного апарату здійснено обґрунтування зв'язку ефективних властивостей з характеристиками компонентів, виконано аналіз особливостей поведінки композитів, зумовлених їхньою гетерогенністю.

2) Побудовані, у строгій математичній постановці описані та фізично обґрунтовані асимптотичні моделі композитних структур різної природи:

- трифазні моделі волокнистого композиту з круглими та квадратними включеннями;
- модифікована трифазна модель композиту з циліндричними включеннями;
- моделі теорії змазки;
- модель двовимірних композитів гексагональної структури;
- моделі двофазних волокнистих композитів для включень різних форм та умов контакту «матриця – включення»;
- моделі двофазних волокнистих композитів з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз;
- двофазні моделі композитів з круглими та квадратними включеннями для побудови узагальнених співвідношень формули Максвелла;
- моделі континуальної апроксимації одновимірних дискретних систем;
- континуальна модель з хаотичною поведінкою.

3) Побудовані асимптотичні моделі коректно працюють в області граничних значень фізичних і геометричних характеристик композиту, тобто саме в тих областях, де при використанні чисельних методів виникають труднощі обчислювального характеру.

4) У строгій математичній постановці розглянуто методи дослідження макроскопічних властивостей композитних матеріалів, запропоновано ефективні аналітичні алгоритми дослідження композитів, армованих дискретними волокнами.

5) Побудовано математичні співвідношення, що описують приведені параметри композитів залежно від геометричної структури армувальних волокон та їх фізичних характеристик.

6) Узагальнені, математично обґрунтовані аналітичні співвідношення, отримані для волокнистих композитів, дозволяють при варіюванні їх фізико-геометричних параметрів описувати цілий клас структур, тоді як чисельні алгоритми практично не допускають узагальнень і не дають можливості отримати уявлення про клас структур у цілому.

7) Побудовані асимптотичні моделі та розроблений для їх опису математичний апарат допускають узагальнення та можуть бути використаними при

проведенні подальших фундаментальних досліджень у галузі будівельної механіки та механіки композитів.

Практичне значення отриманих результатів:

1) Побудовані в дисертації асимптотичні моделі композитних структур різної природи, моделі континуальної апроксимації одновимірних дискретних систем, континуальна модель з хаотичною поведінкою були використані в наукових розробках за дослідницьким грантом OPUS 14 N. 2017/27/B/ST8/01330 Національного Наукового Центру Польщі.

2) Результати дисертації були впроваджені в Науково-дослідному інституті гірничих проблем Академії Інженерних Наук України при розробці низки тематик (АД-464, АД-465, АД-475, АД-476), присвячених вирішенню актуальних питань енергоефективності України, для дослідження макроскопічних властивостей композитних матеріалів.

3) Отримані в роботі аналітичні розв'язки та чисельні оцінки доцільно використовувати в інженерній практиці будівельної механіки при розрахунках ефективних параметрів волокнистих композитів із включеннями різної форми та умовами контакту фаз – за різних конструкційних вимог та технологічних умов виробництва композитних матеріалів.

4) Математичний апарат, розроблений у загальному вигляді для опису асимптотичних моделей, має сенс використовувати при розрахунках застосовуваних у будівництві композитів іншої структури.

5) Знайдені асимптотичні співвідношення доречно використовувати у фундаментальних та прикладних дослідженнях механіки композитів та будівельної механіки для оцінки чисельних розв'язків в області граничних значень параметрів композитів.

6) Моделі континуальної апроксимації стануть у нагоді при практичному дослідженні 1D лінійних хвильових процесів, зокрема, при проектуванні сейсмічно стійких будівельних конструкцій і споруд.

7) Важливим фактором вбачається наявність тісного концептуального зв'язку між задачами щодо ефективних пружних властивостей композиту та визначенням їх ефективної провідності: як показано в статті Z. Hashin, всі методи, моделі та результати для пружних композитів мають аналоги за провідністю (табл. 1).

Таблиця 1 – Зв'язок між параметрами напружено-деформованого стану композиту та характеристиками за провідністю (Z. Hashin)

Теорія пружності		Провідність	
$u_i =$	переміщення	$\varphi =$	температура
$\varepsilon_{ij} =$	деформації	$-\varphi_{,i} =$	градієнт
$\sigma_{ij} =$	напруги	$q_i =$	тепловий потік
$T_i =$	прикладена сила	$q_n =$	нормальна компонента потоку
$C_{ijkl} =$	пружні модулі	$\mu_{ij} =$	провідність
$S_{ijkl} =$	податливість жорстка фаза порожня фаза	$\rho_{ij} =$	питомий опір надпровідність термоізолятор

Більш того, фізичні процеси різної природи – тепло- і електропровідність, електро- і магнітостатика, дифузія – теж описуються ідентичними з математичної точки зору співвідношеннями

Отже, побудовані в рамках теплопровідності асимптотичні моделі і розроблені методи їх математичного опису застосовні також для задач теорії пружності, електропровідності, електро- і магнітостатики, дифузії що значно розширює сферу їх теоретичних та практичних прикладень.

8) Побудовані моделі композитів різної структури й розроблені асимптотичні методи дослідження можуть використовуватися в навчальному процесі при викладанні варіативних навчальних дисциплін «Моделювання та аналітичні розв'язання задач механіки композитів», «Асимптотичні методи в інженерних задачах будівельної механіки» за освітньо-науковою програмою «Промислове та цивільне будівництво» при підготовці фахівців ступеня магістра і ступеня доктора філософії за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія».

Достовірність результатів роботи підтверджується:

- використанням строго обґрунтованого математичного апарату та чисельним моделюванням за допомогою обчислювальних можливостей сучасних математичних пакетів;
- всебічно і ретельно виконаним чисельним та асимптотичним аналізом отриманих розв'язків;
- оцінкою області застосування побудованих моделей та аналітичних методів їх опису;
- порівнянням в окремих випадках з асимптотичними розв'язками, чисельними розрахунками та експериментальними даними інших авторів;
- порівнянням з наближеними аналітичними розв'язками, знайденими на основі спрощених фізичних моделей чи інженерних схем;
- використанням для оцінки розв'язків меж Хашина – Штрікмана або (при можливості) більш вузьких границь, які враховують форму включення;
- аналізом граничних станів структури та відповідних їм розв'язків;
- аналізом фізичної суті розв'язків та чіткою відповідністю отриманих результатів фізичному змісту задач.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дослідження викладені в опублікованій без співавторів монографії [23]. У статтях, виконаних у співавторстві, авторові належать такі результати: на основі теорії осереднення, трифазної моделі композиту та методу збурення форми межі побудовано модель волокнистого композиту з урахуванням форми включень [5, 8]; знайдено розв'язок задачі для композита з високопровідними квадратними включеннями великих розмірів із застосуванням теорії змазки [1]; використано апарат апроксимацій Паде для розширення області застосування трифазної моделі для волокнистого композиту з круглими включеннями [9]; побудовано модифіковану трифазну модель композиту [6]; проведено узагальнення методу теорії змазки для ідеально провідних включень середніх розмірів та знайдені верхня і нижня оцінки приведенного параметра [21]; з використанням теорії асимптотичної гомогенізації отримані аналітичні співвідношення, що описують власні коливання мембрани з гексагональним масивом

круглих включень [11]; побудовані визначальні аналітичні співвідношення в задачі нестационарного теплообміну в композитній мембрані гексагональної структури з круглими включеннями [20]; на основі методів пилкоподібного перетворення аргументу й асимптотично еквівалентних функцій розроблено математичний апарат для опису моделей композитів з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз [12, 13]; отримано аналітичний вираз ефективної теплопровідності композиту з квадратними циліндричними включеннями шляхом зрощування асимптотичних співвідношень [7]; побудовано двофазну модель волокнистого композиту з квадратними в перерізі включеннями [10]; для композитів, армованих волокнами круглого профілю, знайдено вищі наближення формули Максвелла з використанням альтернуючого методу Шварца й апарату апроксимацій Паде [15, 16]; проведено аналітичне й чисельне дослідження асимптотичного осереднення вищого порядку для динамічних задач [18]; застосовано техніку пилкоподібного перетворення аргументу до періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів [3]; застосовано техніку τ -перетворення за часом для дослідження нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні [2]; проведено чисельне дослідження моделей континуальної апроксимації дискретних систем [4, 17]; побудовані неперервні апроксимації функції Гріна решітки Лагранжа з використанням апарату двохточкових апроксимацій Паде [19]; проведено чисельний аналіз і доведено наявність хаосу в неперервній моделі, побудованій з використанням апроксимацій Паде [14].

Апробація матеріалів дисертації. За матеріалами дослідження було зроблено доповіді на 43 українських та міжнародних наукових конференціях, семінарах і конгресах: III Всесоюзна конференція «Міцність, жорсткість, технологічність виробів із композиційних матеріалів» (м. Запоріжжя, Україна, 24-26 жовтня 1989 р.); 30-а Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 5-9 вересня 1994 р.); Міжнародна конференція «Легковагі конструкції в цивільному будівництві» (м. Варшава, Польща, 25-29 вересня 1995 р.); Щорічна наукова конференція з математики й механіки (GAMM) (м. Прага, Чеська Республіка, 27-31 травня 1996 р.); 4-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Варшава, Польща, 8-15 липня 1996 р.); 3-я Європейська конференція з механіки твердого тіла (EUROMECH) (м. Стокгольм, Швеція, 18-22 серпня 1997 р.); 5-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Дніпропетровськ, 30 червня – 7 липня 1997 р.); Міжнародна конференція «III школа геомеханіки» (м. Глівіце, Польща, 23-26 листопада 1997 р.); X Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 20-23 квітня 1998 р.); Перша міжнародна конференція «Наука і освіта '98». Фізико-математичні науки. Технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Одеса – м. Кривий Ріг – м. Київ – м. Харків – м. Дніпродзержинськ, Україна, 23-30 квітня 1998 р.); 6-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Варшава, Польща, 6-11 липня 1998 р.); 32-а Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 5-9 вересня 1998 р.); 5-а Європейська реологічна конференція (м. Порторож, Словенія, 6-11 вересня 1998 р.); Міжнародна конференція з раціональних апроксимацій (ICRA 99) (м. Антверпен, Бельгія, 6-11 червня 1999 р.); 7-й Польсько-Український семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 24-29 червня

1999 р.); Міжнародна конференція з інженерної реології (ICER '99) (м. Зелена Гора, Польща, 27-30 червня 1999 р.); 8-й Польсько-Український семінар (м. Варшава, Польща, 26-30 червня 2000 р.); 4-а Європейська конференція з механіки твердого тіла (EUROMECH) (м. Мец, Франція, 26-30 червня 2000 р.); Третій всесвітній конгрес з нелінійного аналізу (м. Катанія, Італія, 19-26 липня 2000 р.); 33-я Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 1-5 вересня 2000 р.); Перша всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2001». Технічні та фізико-математичні науки (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Донецьк – м. Слов'янськ, Україна, 25-27 червня 2001 р.); 9-й Польсько-Український семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 27 червня – 1 липня 2001 р.); Перша всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2001». Технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Суми, Україна, 5-7 листопада 2001 р.); Друга всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2002». Фізико-математичні та технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Черкаси – м. Львів, Україна, 10-24 травня 2002 р.); XII Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 9-13 червня 2002 р.); 10-й Польсько-Український семінар (м. Варшава, Польща, червень 2002 р.); Міжнародна конференція «Легковагі конструкції в цивільному будівництві» (м. Варшава, Польща, 24-28 червня 2002 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Динаміка наукових досліджень». Архітектура. Механіка (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Харків, Україна, 28 жовтня – 4 листопада 2002 р.); Третя всеукраїнська наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (м. Дніпродзержинськ, Україна, 20-23 квітня 2003 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Україна наукова '2003». Технічні науки. Математика (м. Дніпропетровськ – м. Запоріжжя, Україна, 16-20 червня 2003 р.); XI Українсько-польський семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 23-27 червня 2003 р.); II Міжнародна конференція з інженерної реології (м. Зелена Гора, Польща, 24-27 серпня 2003 р.); VIII Міжнародна науково-практична конференція «Динаміка наукових досліджень '2005». Технічні науки (м. Дніпропетровськ, Україна, 20-30 червня 2005 р.); XV Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 26-30 травня 2008 р.); X Міжнародна конференція з динамічних систем (м. Лодзь, Польща, 7-10 грудня 2009 р.); Міжнародна науково-технічна конференція «Міцність матеріалів та елементів конструкцій», присвячена 100-літтю з дня народження академіка НАН України Г. С. Писаренка (м. Київ, Україна, 28-30 вересня 2010 р.); VIII Європейська конференція з нелінійної динаміки (ENOC 2014) (м. Відень, Австрія, 6-11 липня, 2014 р.); XIII Міжнародна конференція «Динамічні системи – теорія та прикладання» (DSTA) (м. Лодзь, Польща, 7-10 грудня 2015 р.); 13-й Онлайн-конгрес Міжнародного товариства аналізу, його застосування та обчислення (ISSAC) «Конструктивні методи в теорії композитних і пористих середовищ» (м. Гент, Бельгія, 2-6 серпня 2021 р.); Колоквіум Євромех (EUROMECH Colloquium) 626 «Механіка висококонтрастних еластичних композитів (м. Кіль, Велика Британія, 6-8 вересня 2021 р.); 16-а Міжнародна конференція «Динамічні системи – теорія та прикладання» (DSTA) (м. Лодзь, Польща, 6-9 грудня 2021 р.); Міжнародна науково-технічна та навчально-методична конференція «Енергетичний менеджмент: стан та перспективи розвитку – PEMS'2022» (м. Київ, Україна, 15-17

листопада 2022 р.); Всеукраїнська науково-практична конференція «Проблеми надійності та міцності машин і споруд» (м. Харків, Україна, 11-12 травня 2023 р.).

По результатах дисертації було зроблено наукову доповідь за сукупністю статей, опублікованих в журналах, віднесених до першого та другого квартилів (Q1 та Q2), на онлайн-семінарі «Materialica+ Research Group» (м. Краків, Польща, 20 грудня 2023 р.).

У повному обсязі дисертація доповідалася:

- на засіданні фахового семінару кафедри будівельної і теоретичної механіки та опору матеріалів Придніпровської державної академії будівництва та архітектури (м. Дніпро, 29 грудня 2023 р.);

- на міжкафедральному науковому семінарі «Математичне моделювання та оптимізація складних систем» (Український державний хіміко-технологічний університет, м. Дніпро, 29 лютого 2024 р.).

Публікації. За результатами дослідження опубліковано всього 104 наукові праці, у тому числі:

- 1 монографія, що реферована в наукометричній базі даних Scopus;
- 1 одноосібна монографія, опублікована в зарубіжному видавництві (Німеччина);

- 72 статті, з яких 38 статей реферовано в Scopus та/або Web of Science Core Collection (у тому числі 21 стаття – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 квартилів, 3 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 квартилів); 2 статті – в збірнику наукових праць, що входить до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 32 статті – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (із яких 21 статтю опубліковано в зарубіжних видавництвах);

- 30 публікацій – тези доповідей на конференціях (із яких 17 видані в зарубіжних видавництвах).

Структура та обсяг дисертації. Наукова доповідь складається з анотації, змісту, вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел (182 найменування) та 5 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 165 сторінок; робота містить 96 рисунків і 6 таблиць. Основний текст дисертації складає 96 сторінок та додатки на 27 сторінках.

Автор висловлює глибоку подяку проф. Андріанову І. В. за багаторічну плідну співпрацю, конструктивні обговорення актуальних наукових проблем та результативні дискусії щодо пошуку шляхів їх розв'язання, які сприяли формуванню, розвитку й реалізації нового наукового напрямку – асимптотичних методів та моделей в механіці композитних матеріалів.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** сформульовано сутність науково-прикладної проблеми, що розглядається в дисертаційній роботі, обґрунтовано вибір теми дослідження, наведено мету і завдання дослідження відповідно до предмета та об'єкта дослідження, описано використані наукові методи дослідження, визначено наукову новизну отриманих результатів, їх достовірність та теоретичне й практичне значення. Вказано особистий внесок здобувача, публікації за темою дисертації та апробацію матеріалів роботи, надано структуру та обсяг дисертації.

У **розділі 1** розглядається задача визначення ефективної теплопровідності композитного матеріалу з періодичними циліндричними включеннями круглого та квадратного поперечного перерізу, розташованими квадратною сіткою. Визначальні математичні співвідношення отримані на основі трифазної моделі композиту, теорії асимптотичної гомогенізації та методу збурення форми межі для розв'язку задачі на елементарній комірці.

Для ефективних коефіцієнтів теплопровідності знайдені аналітичні вирази нульового порядку апроксимації та перші поправки до них за методом збурення форми межі, що дозволяє враховувати геометрію включень, а не лише їх об'ємну частку.

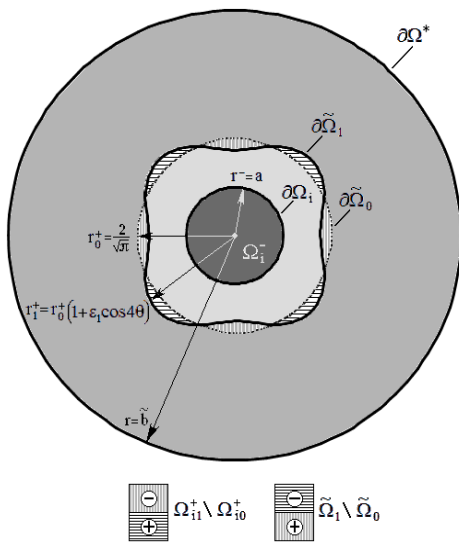


Рисунок 1 – Видозміна області комірки з круглим включенням при осередненні з урахуванням першого наближення

1.1) Для композиту з круглими циліндричними включеннями (рис. 1) отримано вираз ефективного коефіцієнту у вигляді:

$$q_{\text{МЗФМ}}^{(1)} = q_{\text{ТФМ}} + \varepsilon_1^2 \frac{q_{\text{ТФМ}} - 1}{4} + o(\varepsilon_1^2), \quad (1)$$

де $q_{\text{ТФМ}}$ – розв'язок нульового наближення за трифазною моделлю, що співпадає з формулою Максвелла.

Відповідні математичні оцінки показують, що мале збурення контуру комірки порядку ε_1 призводить до поправок в осереднених співвідношеннях порядку ε_1^2 .

Проведено асимптотичний аналіз розв'язків; обчислення за ними порівняні з відомими в деяких окремих випадках результатами; оцінені межі застосування розроблених моделей.

Аналіз виразу приведенного коефіцієнта теплопровідності на основі трифазної моделі композиту в двочленному наближенні методу збурення форми межі показав:

- 1) Формула (1) достовірно описує поведінку гомогенізованого середовища:
 - у разі провідностей включень та матриці одного порядку $\lambda \sim 1$ – для включень будь-якого розміру $0 \leq a \leq 1$;
 - якщо провідність включень значно відрізняється від провідності матриці, тобто якщо $0 \leq \lambda \ll 1$ або $1 \ll \lambda < \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$ – для розмірів включень $0 \leq a \leq 0,8$.

2) Оцінка меж застосування побудованої моделі показала її обмеженість для випадку включень великих розмірів $a \rightarrow 1$ гранично великої провідності $\lambda \rightarrow \infty$.

Фізична інтерпретація цього результату полягає в тому, що двочленне наближення не дає кількісного опису перколяційного переходу і не показує якісну картину появи в композиті нескінченного кластера.

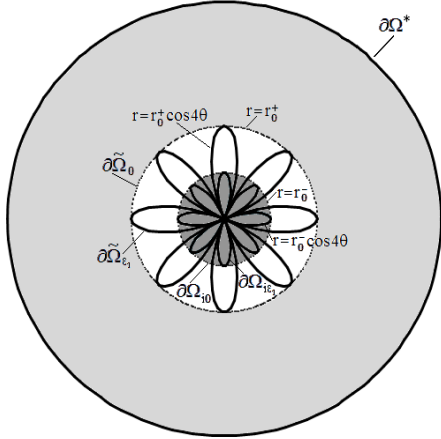


Рисунок 2 – Межі квадратної комірки в нульовому наближенні та перші поправки до них

1.2) Для композиту з циліндричними включеннями квадратного профілю розв'язок нульового наближення дає аналітичний вираз ефективного коефіцієнта теплопровідності, що співпадає з формулою Максвелла.

На рис. 2 показані контури включення і комірки в нульовому наближенні та криві, що визначають поправки до них у першому наближенні (поправки порядку ε_1).

Аналітичний вираз першої поправки $\tilde{\lambda}_1$ осередненого коефіцієнта теплопровідності визначається з осередненого рівняння першого наближення

$$\tilde{\lambda}_1 \Delta u_0 = \frac{1}{4b^2} \left[\iint_{\Omega_{i1}^+ \setminus \Omega_{i0}^+} \Delta u_0 d\xi d\eta + \lambda \iint_{\Omega_{i1}^- \setminus \Omega_{i0}^-} \Delta u_0 d\xi d\eta + \tilde{\lambda}_0 \iint_{\tilde{\Omega}_1 \setminus \tilde{\Omega}_0} \Delta u_0 d\xi d\eta + \oint_{\partial\Omega_{i1}^+} \frac{\partial u_{i0}^+}{\partial n} dl + \oint_{\partial\Omega_{i1}^-} \frac{\partial u_{i0}^+}{\partial n} dl + \lambda \oint_{\partial\Omega_{i1}^+} \frac{\partial u_{i0}^-}{\partial n} dl + \tilde{\lambda}_0 \oint_{\partial\tilde{\Omega}_1} \frac{\partial \tilde{u}_{i0}}{\partial n} dl + \oint_{\partial\tilde{\Omega}_0} \frac{\partial u_{i1}^+}{\partial n} dl + \oint_{\partial\tilde{\Omega}_{i0}} \frac{\partial u_{i1}^+}{\partial n} dl + \lambda \oint_{\partial\tilde{\Omega}_{i0}} \frac{\partial u_{i1}^-}{\partial n} dl + \tilde{\lambda}_0 \oint_{\partial\tilde{\Omega}_0} \frac{\partial \tilde{u}_{i1}}{\partial n} dl \right]. \quad (2)$$

у вигляді: $\tilde{\lambda}_1 = 0$. Отже, для композитної структури з квадратними включеннями ефективний коефіцієнт на основі трифазної моделі композиту з урахуванням першої поправки за методом збурення форми межі визначається співвідношенням:

$$q_{\text{МЗФМ}} = \frac{1 - a^2 + \lambda(1 + a^2)}{1 + a^2 + \lambda(1 - a^2)} + o(\varepsilon_1). \quad (3)$$

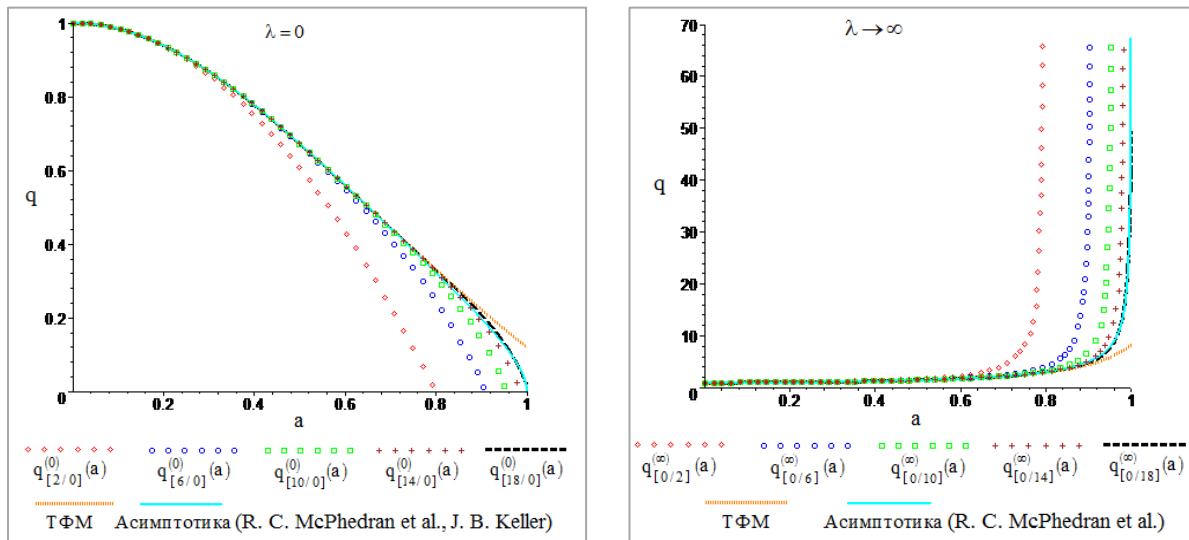
Проведений аналіз показав, що в разі циліндричних включень квадратного профілю трифазна модель композиту дає достатньо точні результати для приведенного параметра теплопровідності в усьому діапазоні зміни геометричного розміру включень a та їх фізичної характеристики λ , включаючи граничні випадки:

- співвідношення (3) точно задовольняє класичну теорему Келлера для всіх значень провідності вставок λ , включаючи граничні випадки $\lambda \rightarrow 0$ і $\lambda \rightarrow \infty$;
- головний член асимптотичного розкладення (3) для гранично великих непровідних включень співпадає з відомою асимптотикою, отриманою N. Bakhvalov & G. Panasenko;
- порівняння значень ефективного параметра, обчисленого за формулою (3), з відомими результатами інших авторів для різних випадків розмірів та провідності включень вказують на високу точність запропонованого підходу.

В розділі 2 досліджуються можливості узагальнення трифазної моделі композиту:

- з використанням апроксимацій Паде;
- побудовою модифікованої трифазної моделі композиту.

2.1) Знайдені послідовності апроксимацій Паде осередненого коефіцієнта теплопровідності для випадків абсолютно провідних та непровідних включень, які графічно проілюстровані на рис. 3 у порівнянні з розв’язком за трифазною моделлю композиту та асимптотичною формулою, отриманою R. C. McPhedran et al.



а) Непровідні включення

б) Абсолютно провідні включення

Рисунок 3 – Послідовності апроксимацій Паде осередненого коефіцієнта

У випадку довільної провідності включень λ отримані в аналітичному вигляді вирази апроксимацій Паде розв’язку за трифазною моделлю композиту:

$$q_{[0/18]}(a) = \frac{(\lambda + 1)^9}{\sum_{n=0}^9 \frac{(-1)^n}{2^n} \left(\frac{\pi a^2}{2}\right)^n (\lambda + 1)^{9-n} (\lambda - 1)^n} \quad \text{при } 1 \leq \lambda < \infty; \quad (4)$$

$$q_{[18/0]}(a) = \frac{\sum_{n=0}^9 \frac{1}{2^n} \left(\frac{\pi a^2}{2}\right)^n (\lambda + 1)^{9-n} (\lambda - 1)^n}{(\lambda + 1)^9} \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (5)$$

які потрапляють у «вилки» Хашина – Штрікмана.

Отриманий з використанням апроксимацій Паде розв’язок значно розширює межі застосування трифазної моделі композиту:

- дає якісну картину перколяційного переходу й утворення нескінченного кластера та кількісні оцінки високої точності ефективного коефіцієнта теплопровідності для композитів з включеннями великих розмірів, близьких до граничного;

- в абсолютному вираженні дає практично прийнятні результати для композитів з включеннями будь-якої провідності, включаючи граничний випадок абсолютної провідності, для розмірів включень до $a = 0,996$ включно.

2.2) Розроблено модифікований алгоритм трифазної моделі композиту, суть якого полягає в такому: всі, крім однієї, комірки композитної структури замінюються еквівалентним гомогенним середовищем $\tilde{\Omega}$, що має невідомий (шуканий) приведений коефіцієнт теплопровідності $\tilde{\lambda}$. При цьому квадратний контур матриці (комірки) вважається колом змінного радіуса (рис. 4, 5):

$$r = \begin{cases} b(\eta) = \sqrt{1 + \eta^2}, & 0 \leq \eta \leq 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ b(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{при} \quad \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases} \quad (6)$$

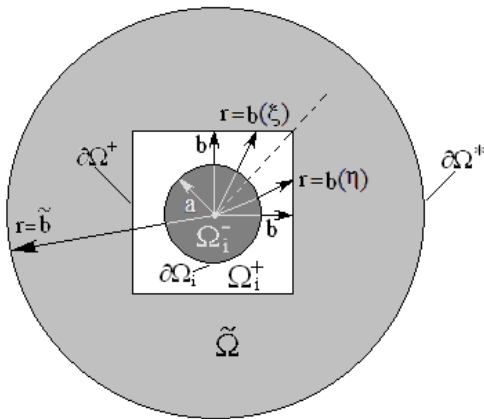


Рисунок 4 – Перетворення квадратного контуру комірки в модифікований трифазній моделі композиту

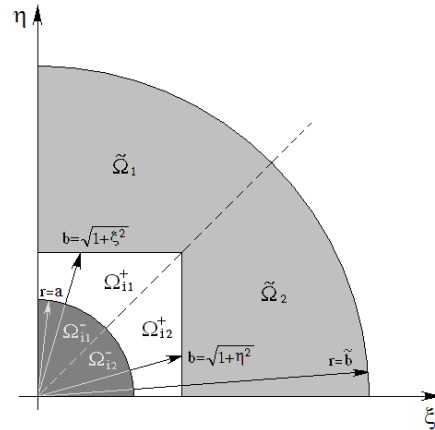


Рисунок 5 – Апроксимація трифазної області в модифікований трифазній моделі композиту

За модифікованою трифазною моделлю композиту приведений параметр $\tilde{\lambda}$ визначається з трансцендентного рівняння:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 + \left(\frac{1}{\Delta} - \Delta\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{a^2}{\Delta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta}}{1 + \left(\frac{1}{\Delta} - \Delta\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta} - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{a^2}{\Delta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta}}, \quad \text{де} \quad \Delta = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\lambda} - 1}{\tilde{\lambda} + 1} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} a^2}. \quad (7)$$

Модифікована трифазна модель композиту працює та дає достовірні результати у всьому діапазоні зміни обох параметрів композиту: геометричного – розміру включень $0 < a < 1$ та фізичного – провідності включень $0 < \lambda < \infty$, включаючи граничні випадки $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow 1$; $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$:

1) Головний член асимптотичного розкладення ефективного параметра (7) для щільно упакованих ($a \rightarrow 1$) абсолютно провідних ($\lambda \rightarrow \infty$) включень

$$\tilde{\lambda} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} + 1 \quad (8)$$

співпадає з асимптотикою, наведеною в статті R. C. McPhedran et al.

2) Вираз приведенного параметра з трансцендентного рівняння (7) задовольняє теорему Келлера.

3) У табл. 2 для композитної структури з абсолютно провідними включеннями $\lambda \rightarrow \infty$ гранично великих розмірів $a \rightarrow 1$ проведено порівняння результатів розрахунків ефективного коефіцієнта теплопровідності, знайденого за модифікованою трифазною моделлю композиту, з відомими даними інших авторів.

Таблиця 2 – Результати розрахунків ефективного коефіцієнта теплопровідності для гранично великих розмірів $a \rightarrow 1$ абсолютно провідних включень

Параметр $1/\sqrt{1-a^2}$	Розмір включень a	Чисельний розрахунок (R. C. McPhedran et al.)	Асимптотика (R. C. McPhedran et al.)	Модифікована трифазна модель композиту
10	0,9949874370	29,4440	29,2743	30,1283
50	0,9997999801	155,1894	154,9380	156,0179
100	0,9999499986	312,6460	312,0177	313,1276
1000	0,9999995001	3142,5927	3142,5927	3140,9037

Розділ 3 присвячений побудові на основі теорії змазки асимптотичних розв'язків для висококонтрастних щільно упакованих волокнистих композитів з різною структурою і формою включень.

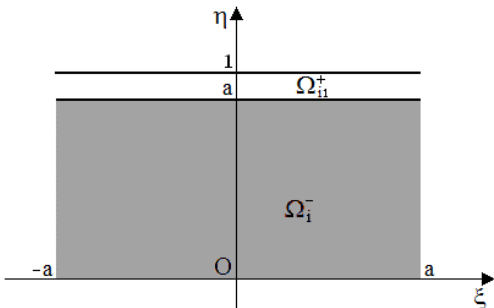


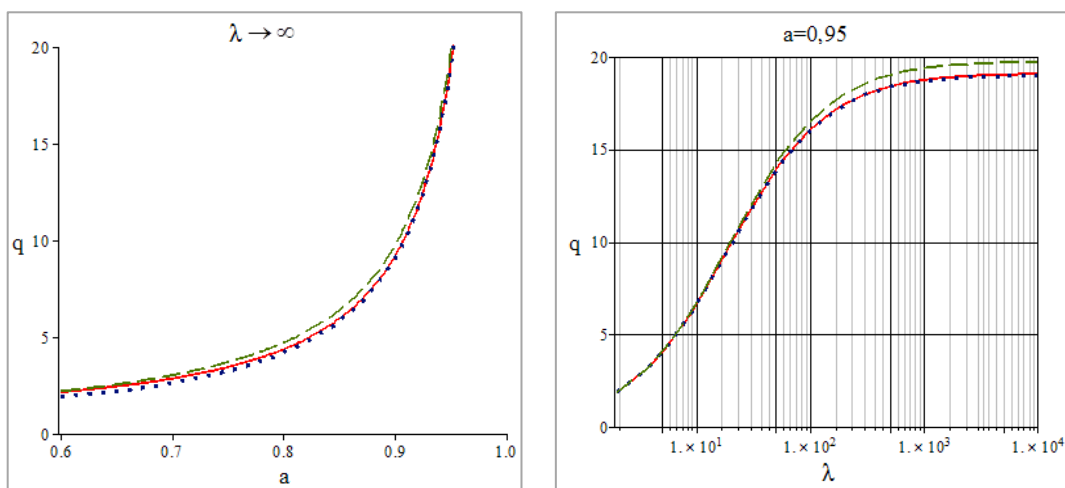
Рисунок 6 – Розрахункова модель комірки з квадратним включенням

3.1) Для композиту з квадратними включеннями (рис. 6) вираз приведенного параметра q визначається у вигляді:

$$q = \frac{\lambda(1 - a^2 + a^3) + a^2(1 - a)}{\lambda(1 - a) + a}. \quad (9)$$

В роботі I. V. Andrianov et al. були знайдені для приведенного параметра композиту двосторонні оцінки \tilde{q} , \underline{q} з вузькою «вилкою».

Вираз q (9) при всіх значеннях $a \gg 0$ і $\lambda \gg 1$, $\lambda \rightarrow \infty$ потрапляє в ці межі, тобто $\underline{q} \leq q_{\text{ТЗМ}} \leq \tilde{q}$ (рис. 7).



— q (9) $\cdot \cdot \cdot \cdot$ \underline{q} (I. V. Andrianov et al.) — — \tilde{q} (I. V. Andrianov et al.)

а) $\lambda \rightarrow \infty$

б) $a = 0,95$

Рисунок 7 – Графіки ефективного коефіцієнта q (9) та його двосторонні оцінки \tilde{q} , \underline{q}

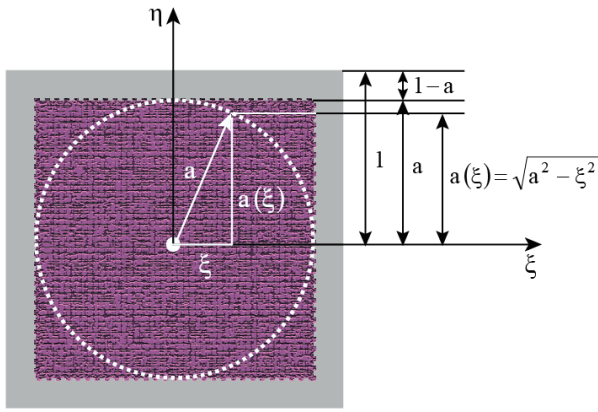


Рисунок 8 – Апроксимація круглого контуру включення в моделі теорії змазки

3.2) Для композиту з круглими включеннями (рис. 8) вираз приведенного коефіцієнта при $\lambda > \frac{a}{1+a}$, $0 \ll a < 1$ має вигляд:

$$q = 1 - a + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{2\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{\Delta_1/\Delta_2}}{\sqrt{\Delta_1\Delta_2}} - \frac{\pi}{2} \right), \quad (10)$$

де $\Delta_1 = \lambda(1+a) - a$, $\Delta_2 = \lambda(1-a) + a$.

Із виразу (10) маємо для абсолютно провідних включень великих геометричних розмірів, близьких до граничного, асимптотичне розкладення

$$q = \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}{\sqrt{1-a^2}} + 1 - a - \frac{\pi}{2} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad 0 \ll a < 1, \quad (11)$$

головний член якого при $a \rightarrow 1$ співпадає з відомим асимптотичним розв'язком R. C. McPhedran et al.

3.3) Для композиту з криволінійними ромбічними включеннями (рис. 9) вираз приведенного коефіцієнта при $\lambda > 1 + 1/\sqrt{1+(1-a)^2}$, $0 \ll a < 1$ визначається таким чином:

$$q = 1 - a + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{\Delta - 1}} \ln \frac{\sqrt{\Delta - 1} + \sqrt{\Delta - 1}}{\sqrt{\Delta - 1} - \sqrt{\Delta + 1}} \right), \quad \text{де } \Delta = (\lambda - 1)^2 (1 + (1 - a)^2). \quad (12)$$

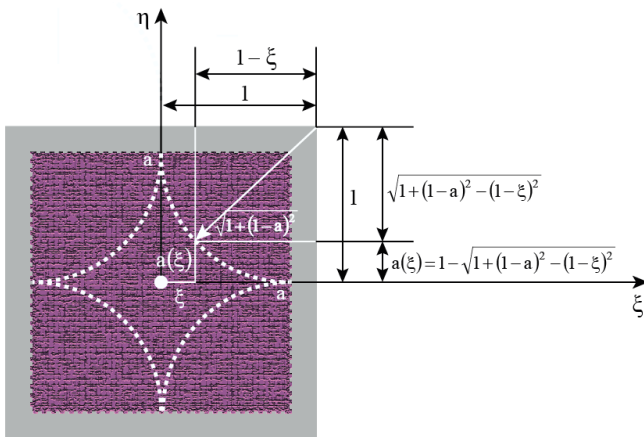


Рисунок 9 – Апроксимація криволінійного ромбічного включення в моделі теорії змазки

Зі співвідношення (12) отримані асимптотики за геометричним і фізичним параметрами композиту:

– абсолютно провідні включення ($\lambda \rightarrow \infty$) великих геометричних розмірів ($0 \ll a < 1$):

$$q = 1 - a + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln \left(2\lambda \sqrt{1 + (1 - a)^2} \right)}{\lambda \sqrt{1 + (1 - a)^2}}; \quad (13)$$

– включення гранично великих геометричних розмірів ($a = 1$) і великої, але скінченної провідності ($1 \ll \lambda < \infty$):

$$q = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{\lambda(\lambda - 2)}} \ln \frac{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda - 2}}{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda - 2}} \right). \quad (14)$$

3.4) Для композиту з гексагональним масивом круглих включень розрахункова модель методу теорії змазки та апроксимація контуру комірки надані на рис. 10, 11.

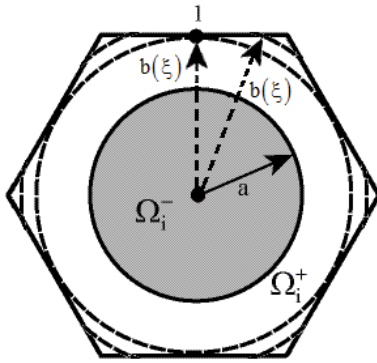


Рисунок 10 – Розрахункова модель методу теорії змазки для гексагональної решітки

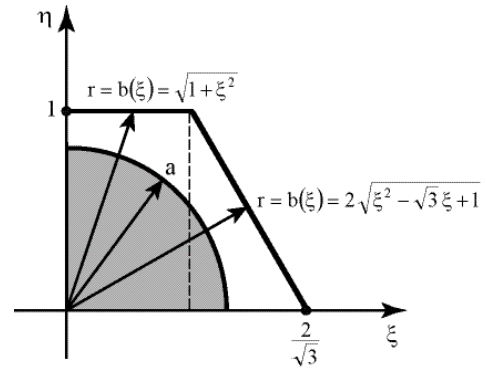
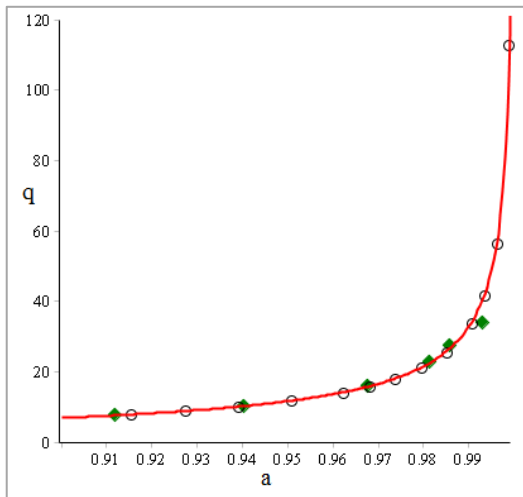


Рисунок 11 – Апроксимація 1/4 частини шестикутного контуру комірки

Асимптотичний вираз приведенного параметра при $\lambda \gg 1$, $a \gg 0$ має вигляд:

$$q = \frac{2\sqrt{3}\Delta^2}{\sqrt{1-\Delta^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-\Delta^2}} + 1 + \frac{\sqrt{3}\Delta^2}{3} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3\Delta} + \frac{4}{\sqrt{1-\Delta^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\Delta}}{\sqrt{1+\Delta}} \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (\sqrt{3}\Delta - \sqrt{3\Delta^2 - 1}) \right) - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2(\sqrt{3}\Delta - \sqrt{3\Delta^2 - 1} - 1)\sqrt{1-\Delta^2}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}\Delta)\Delta + \sqrt{3\Delta^2 - 1}((1+\sqrt{3})\Delta - 2) + 2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \left(2\sqrt{\frac{1}{\Delta^2} - 1} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{(2 + 3\Delta^2 + 2\sqrt{3(3\Delta^2 - 1)})}{(4 - 3\Delta^2)} \right\}, \text{ де } \Delta = \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}} a. \quad (15)$$



— q (15) ○ Чисельний розрахунок (W. T. Perrins et al.)
◆ Експериментальні дані (W. T. Perrins et al.)

Рисунок 12 – Ефективний параметр композиту при $a \gg 0$, $\lambda \rightarrow \infty$

У граничному випадку $\lambda \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 1$ з (15) отримуємо з урахуванням головного члена асимптотики і першої поправки до нього асимптотичне розкладення:

$$q_{\text{асимпт}}^{(\infty)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{1-a^2}} + 1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} - \\ - \frac{1}{4} \ln(5 + 2\sqrt{6}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}), \quad (16)$$

головний член якого співпадає з асимптотичною формулою $q_{\text{ас}}^{(\infty)}$, отриманою в роботі L. Verlyand & A. Novikov.

Проведене чисельне порівняння отриманого розв'язку з відомими результатами інших авторів (рис. 12, 13) підтверджує його високу точність.

3.5) Проведено узагальнення підходу теорії змазки для включень середніх розмірів $a \leq 1/\sqrt{3}$:

$$q_{с.вкл.} = 1 - \frac{\sqrt{3} \pi a^2}{6} + \frac{\sqrt{3} a^2}{3\sqrt{1-a^2}} \left(4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + 3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right). \quad (17)$$

Побудовано послідовність АП $q_{[2/2]}^*$,

$q_{[2/4]}^*, \dots, q_{[2/10]}^*$ виразу q^* :

$$q^* = \frac{\sqrt{3} a^2}{\sqrt{1-a^2}} \left(\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} \right). \quad (18)$$

Співвідношення для ефективного параметра

$$q_{\text{Паде}} = 1 - \frac{\sqrt{3} \pi a^2}{6} + \frac{2\sqrt{3} a^2}{\sqrt{1-a^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) + q_{[2/10]}^*. \quad (19)$$

показує коректні результати для будь-яких розмірів $0 \leq a < 1$ абсолютно провідних включень і при $a \rightarrow 1$ дає головний член асимптотики, який співпадає з відомим результатом, отриманим S. Gluzman et al.

На рис. 14 показані розв'язки, що описуються послідовністю апроксимацій Паде $q_{[2/2]}^*, q_{[2/4]}^*, \dots, q_{[2/10]}^*$. На рис. 15 графіки приведенного параметра для абсолютно провідних включень показані порівняно з результатами обчислення $q_{аб.пр.}$ за формулою, отриманою S. Gluzman et al.

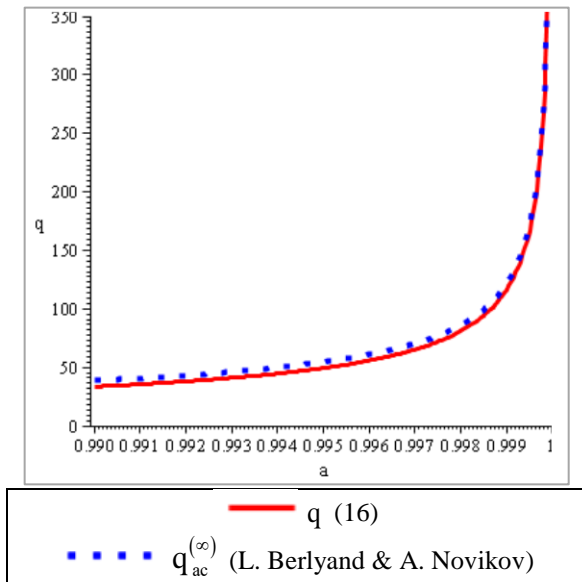


Рисунок 13 – Ефективний параметр композиту при $a \rightarrow 1, \lambda \rightarrow \infty$

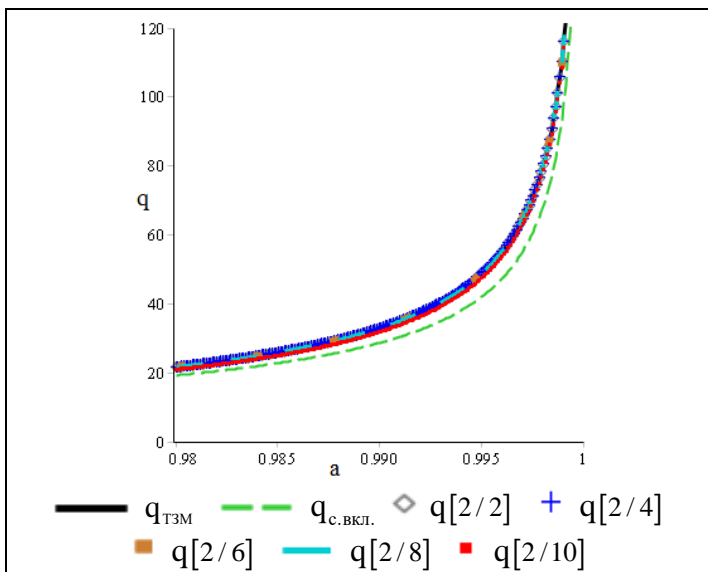


Рисунок 14 – Графіки приведенного параметра при $0,98 \leq a < 1$, що описуються послідовністю апроксимацій Паде

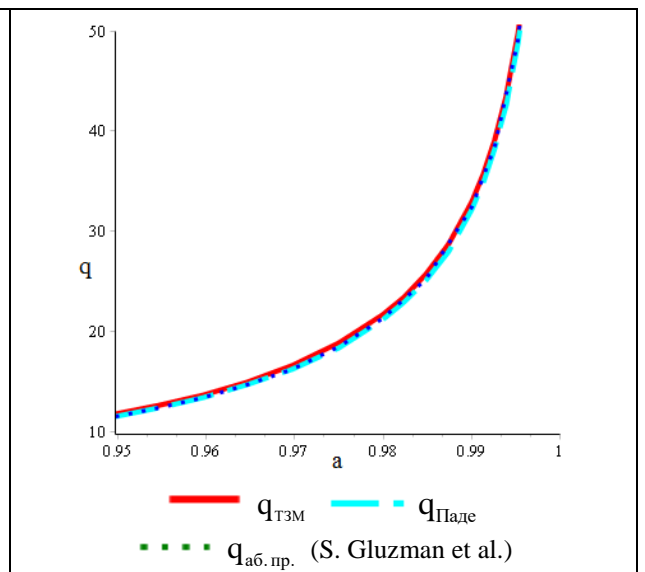


Рисунок 15 – Графіки приведенного параметра при $0,95 \leq a < 1$ для абсолютно провідних включень

3.6) Отримано розв'язок задачі про власні коливання жорстко защемленої по контуру прямокутної мембрани, що являє собою композитну структуру з періодично розташованими круглими включеннями, які становлять гексагональну решітку.

В загальному вигляді представлені аналітичні вирази для визначення власних функцій і частот коливань та перші поправки до них. Проаналізовано структуру задач на комірці першого й другого наближень та наведено їх розв'язки в рамках моделі теорії змазки.

Показано, що за умови, якщо «повільна» функція першого наближення u_{10} не задовольняє граничним умовам на зовнішньому контурі мембрани, отримуємо ненульову першу поправку власної частоти ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{q \left(\int_0^{\ell_2} \phi(y) dy + \int_0^{\ell_1} \phi(x) dx \right)}{\bar{q} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} u_0^2 dx dy}, \text{ де } \phi(y) = \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=\ell_1}, \phi(x) = \frac{\partial u_0}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=\ell_2}. \quad (20)$$

3.7) З використанням перетворення Лапласа та методу асимптотичної гомогенізації досліджено нестационарну теплопровідність у волокнистих композитних матеріалах гексагональної структури.

Гомогенізоване рівняння отримано у вигляді:

$$K^0 \Delta T_0 + \frac{1}{|\Omega_i|} \left[K^+ \iint_{\Omega_i^+} \left(\frac{\partial^2 T_1^+}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 T_1^+}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + K^- \iint_{\Omega_i^-} \left(\frac{\partial^2 T_1^-}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 T_1^-}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta \right] = p T_0 - \tilde{f}, \quad (21)$$

де $K^\pm = \frac{k^\pm}{c^\pm \rho^\pm \ell^2}$; k – коефіцієнт теплопровідності; T – температура; ρ – щільність;

c – питома теплоємність; 2ℓ – характерний розмір комірки;

$$\tilde{f} = \frac{1}{|\Omega_i|} \left[\iint_{\Omega_i^+} f^+(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \iint_{\Omega_i^-} f^-(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right]; \quad K^0 = \frac{K^+ |\Omega_i^+| + K^- |\Omega_i^-|}{|\Omega_i|}; \quad (22)$$

$$T_0(x, y, p) = \tilde{f} \text{ при } t = 0. \quad (23)$$

При розв'язку локальної задачі за теорією змазки гексагональна форма елементарної комірки була апроксимована шляхом введення функції змінної координати. Для ідеально провідного щільно упакованого композиту ефективний параметр, визначений за теорією змазки, описується співвідношенням:

$$q = 1 + \frac{4\sqrt{3}a^2}{3\sqrt{1-a^2}} \left[\frac{3}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} + \arctan \left(\left(\sqrt{3}a - \sqrt{3a^2-1} \right) \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) \right] - \frac{1}{4} \arctan \frac{2 \left(\sqrt{3}a - 1 - \sqrt{3a^2-1} \right) \sqrt{1-a^2}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}a)a + \sqrt{3a^2-1}(a-2+\sqrt{3}a) + 2} \quad (24)$$

$$-\frac{1}{8} \arctan \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \left] + \frac{a^2}{4} \left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 2\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3a} - \ln \frac{(2+3a^2+2\sqrt{3(3a^2-1)})}{(4-3a^2)} \right).$$

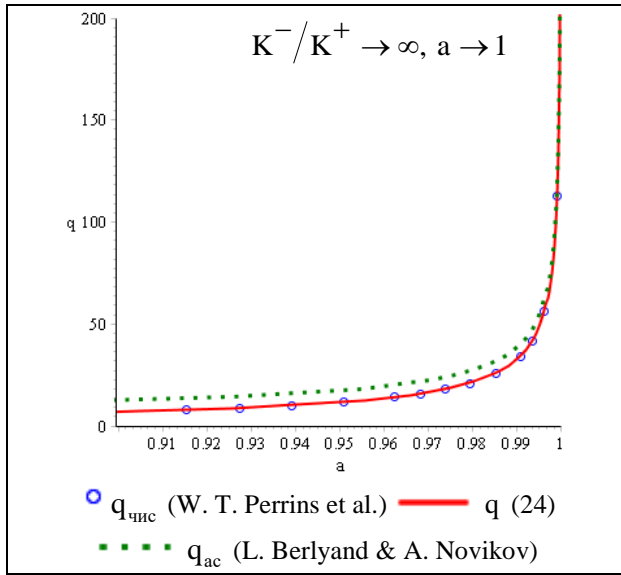


Рисунок 16 – Ефективний параметр висококонтрастного щільно упакованого композиту

Порівняння (рис. 16) ефективного параметра q (24) з відомими чисельним $q_{\text{чис}}$ (W. T. Perrins et al.) та асимптотичним $q_{\text{ас}}$ (L. Berlyand & A. Novikov) розв'язками підтверджують високу точність отриманого результату.

Оскільки розв'язок періодичної задачі має специфічні екстремальні властивості, знайдений розв'язок може бути використаний для оцінки ефективних властивостей композитів із випадковою структурою.

Розглянуто задачу для скінченної області. Як приклад досліджено випадок охолодження прямокутної композитної області за законом охолодження Ньютона.

У **4-му розділі** для вивчення граничних станів композитних структур використовується апарат асимптотично еквівалентних функцій.

4.1) Для композита з періодично розташованими циліндричними включеннями квадратного профілю шляхом зрощування асимптотичних представлень побудовано єдиний аналітичний вираз приведенного параметра теплопровідності.

Розв'язок задачі проводиться у три етапи:

- зрощування за розміром включення a при їх фіксованій провідності $\lambda \gg 1$ асимптотичних розкладань за двофазною моделлю композиту, побудованою у припущенні малих геометричних розмірів включень $a \ll 1$, і виразу $q_{\text{ТЗМ}}$ (9), знайденому за теорією змазки при $a \gg 0$: $q^{(\infty)} = (1 - \varepsilon_a) q_{\text{ДФМ}}^{(\infty)} + \varepsilon_a q_{\text{ТЗМ}}^{(\infty)}$;

- апроксимація отриманого при $\lambda \gg 1$ виразу осередненого параметра на випадок $0 < \lambda \ll 1$: $q^{(0)} = (1 - \varepsilon_a) q_{\text{ДФМ}}^{(0)} + \varepsilon_a q_{\text{ТЗМ}}^{(0)}$;

- зрощування знайдених асимптотичних співвідношень $q^{(\infty)}$ при $\lambda \gg 1$ та $q^{(0)}$ при $0 < \lambda \ll 1$ за провідністю включень λ :

$$q = (1 - \varepsilon_\lambda) q^{(0)} + \varepsilon_\lambda q^{(\infty)}, \text{ де } \varepsilon_\lambda = \frac{\lambda^2 + \lambda/2}{\lambda^2 - 1}; \quad (25)$$

$$\varepsilon_a = \frac{a^2}{2}(1+a) + \frac{5a^2}{2}(1-a) - 3a^2(1-a)^2 + 12a^3(1-a)^2 - 16a^3(1-a)^3 - 6a^4(1-a)^2 + 20a^4(1-a)^3 + 35a^4(1-a)^4 + 56a^5(1-a)^5 - 70a^4(1-a)^6 + 70a^5(1-a)^6 + \quad (26)$$

$$+140a^6(1-a)^6 - 322a^5(1-a)^7 - 924a^6(1-a)^7 + 1716a^7(1-a)^7 - 3432a^7(1-a)^8 + 6435a^8(1-a)^8 - 12870a^8(1-a)^9 + 24310a^9(1-a)^9 - 48620a^9(1-a)^{10} + 92378a^{10}(1-a)^{10}.$$

На рис. 17 схематично визначені області, в яких основний внесок у вираз приведенного коефіцієнта вносять відповідні асимптотичні представлення.

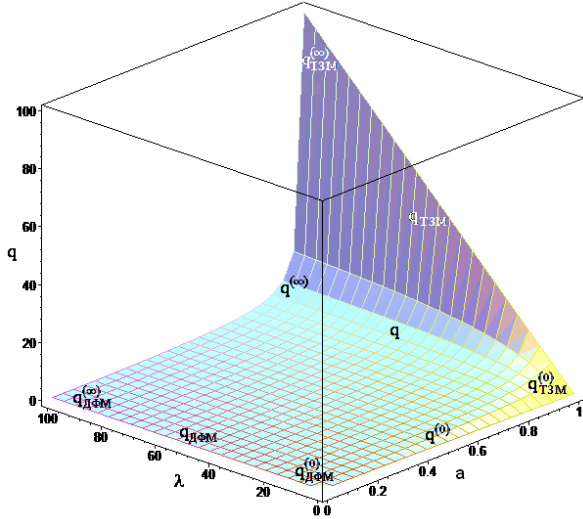


Рисунок 17 – Якісна картина розподілу асимптотик приведенного коефіцієнта теплопровідності

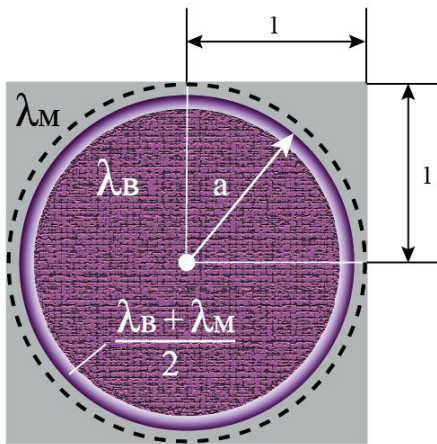


Рисунок 18 – Композит з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз із середнім значенням провідностей матриці та включення

4.2) За допомогою методів негладкого перетворення аргументу та асимптотично еквівалентних функцій побудовано моделі й отримано асимптотичні представлення для волокнистих композитів різної структури: із включеннями великого розміру та провідності, розташованими по квадратній сітці; з непровідними включеннями; з гексагональним масивом круглих включень ідеальної провідності та непровідних; з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз.

Знайдено асимптотичний розв’язок для композиту з круглими включеннями великої провідності $\lambda \gg 1$ і гранично великого розміру $a \rightarrow 1$, що мають тонкий прошарок на межі розділу фаз, який характеризується середнім значенням провідностей матриці та включень $\lambda_i = (\lambda_в + \lambda_м) / 2$ (рис. 18).

Провідності включень і матриці описуються узагальненими аналітичними співвідношеннями виду:

$$\tilde{\lambda}_в = a\lambda_в + (1-a)\lambda_м + 2a(1-a)(\lambda_в - \lambda_м)\tau'_в; \quad (27)$$

$$\tilde{\lambda}_м = a\lambda_в + (1-a)\lambda_м - 2a(1-a)(\lambda_в - \lambda_м)\tau'_м, \quad (28)$$

де $\tau_в = \tau_в(\tilde{x})$, $\tau_м = \tau_м(\tilde{x})$, $\tilde{x} = 2x$ – пилкоподібні функції включень та матриці (рис. 19), перетворені з урахуванням параметрів, що характеризують нахил зубів пили: $\theta_в = 2a - 1$, $\theta_м = 1 - 2a$.

Для коректного переходу від пилкоподібних функцій до їх гладких аналогів використовується метод асимптотично еквівалентних функцій, а саме, має місце співвідношення:

$$\text{при } \tilde{\lambda} \rightarrow 1: f_1(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{\lambda} - 1}{\sqrt{2\tilde{\lambda}}} \sim \frac{\sqrt{\Delta} \ln \Delta}{\sqrt{\Delta - 1}} = f_0(\tilde{\lambda}), \text{ де } \Delta = \frac{\tilde{\lambda}}{2} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}. \quad (29)$$

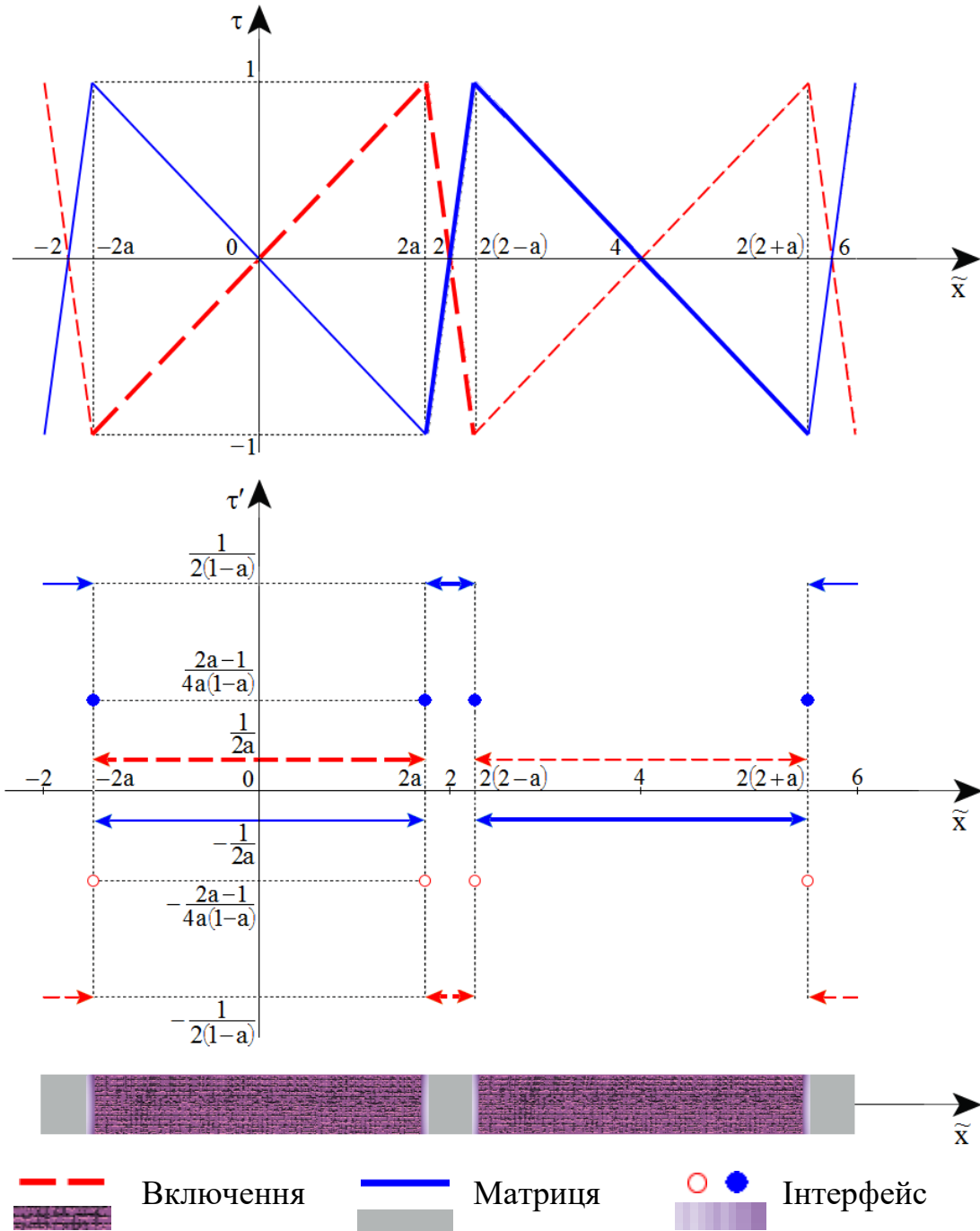


Рисунок 19 – Пилоподібні функції включення та матриці $\tau_v(\tilde{x})$, $\tau_M(\tilde{x})$ та їх похідні $\tau'_v(\tilde{x})$, $\tau'_M(\tilde{x})$

Розкладення функцій $f_1(\tilde{\lambda})$ і $f_0(\tilde{\lambda})$ в ряди при $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$ співпадають з точністю до членів порядку $(\tilde{\lambda} - 1)^4$ включно. Функція $f_0(\tilde{\lambda})$ не змінюється при заміні $\tilde{\lambda} \Leftrightarrow \tilde{\lambda}^{-1}$, тобто адекватно описує також функцію $f_2(\tilde{\lambda}) = f_1(\tilde{\lambda}^{-1})$ при $\tilde{\lambda} \rightarrow 1 - 0$ (рис. 20, 21).

Асимптотичний вираз приведенного параметра у разі контакту абсолютно провідних круглих включень з інтерфейсом отримуємо у вигляді:

$$q_{\text{кр.і.}}^{(\infty)} = \frac{\pi \lambda}{2(\ln \lambda - \ln 2)}. \quad (30)$$

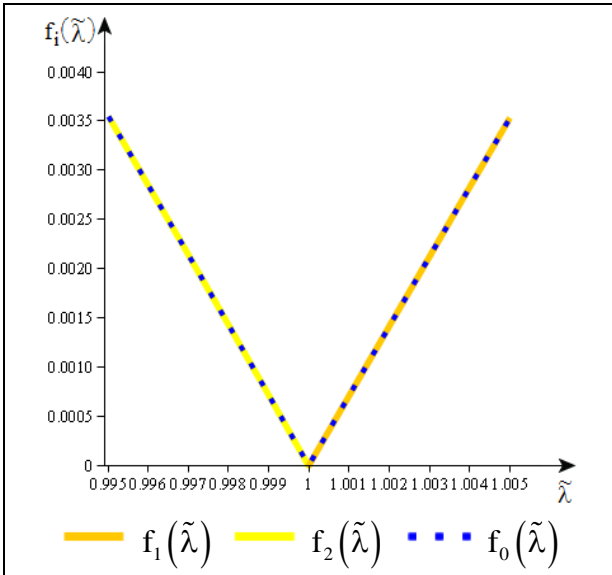


Рисунок 20 – Графіки асимптотично еквівалентних при $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$ функцій

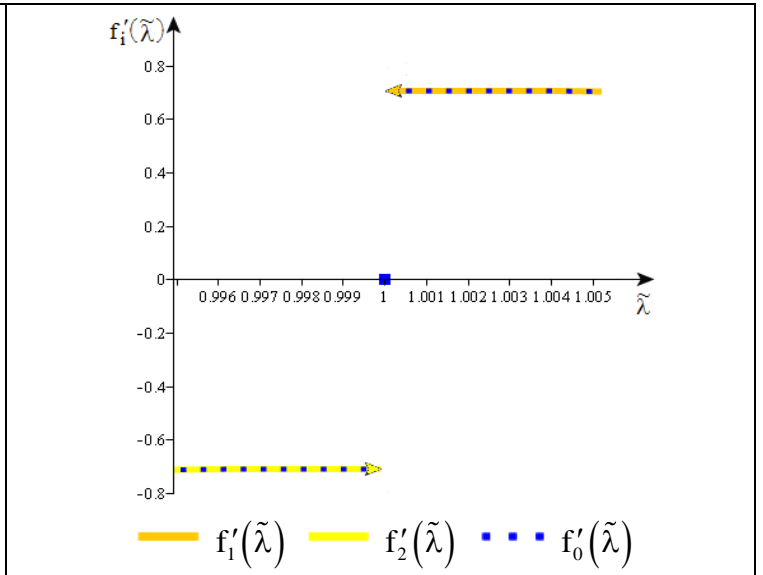


Рисунок 21 – Графіки похідних асимптотично еквівалентних при $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$ функцій

Головна частина асимптотичної формули (30) співпадає з асимптотикою R. W. O'Brien і відрізняється від результату, отриманого R. C. McPhedran et al., постійним членом: $\delta = |\gamma - \ln 2| \approx 0,11$.

4.3) При контакті непровідних круглих включень з інтерфейсом оцінюємо вираз:

$$f_3(\tilde{\lambda}) = (1 - \tilde{\lambda})\sqrt{2\tilde{\lambda}} \sim 2\tilde{\lambda}f_0(\tilde{\lambda}) \text{ при } \tilde{\lambda} \rightarrow 1; \quad (31)$$

тоді отримуємо асимптотичну формулу для приведеного параметра у вигляді:

$$q_{\text{кр.і.}}^{(0)} = \frac{2\lambda}{\pi} (\ln \lambda^{-1} - \ln 2). \quad (32)$$

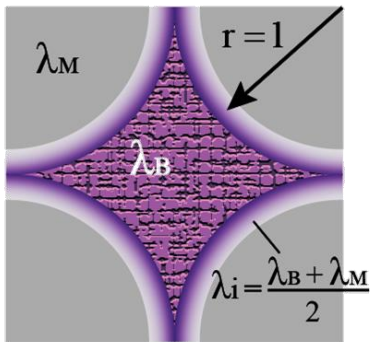


Рисунок 22 – Композит з високопровідними криволінійними ромбічними включеннями з інтерфейсом

Асимптотичні співвідношення приведених параметрів для абсолютно провідних (30) і непровідних (32) включень, що торкаються по тонкому прошарку, задовольняють теорему Келлера.

4.4) Асимптотичні розв'язки для композитів з криволінійними ромбічними включеннями за наявності тонкого прошарку на межі розділу фаз отримані у вигляді:

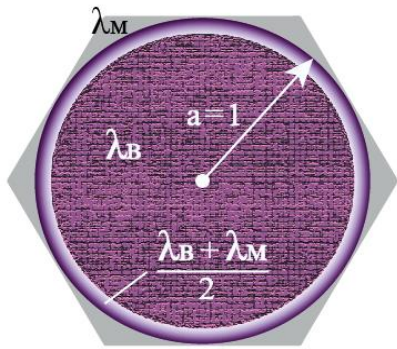
– у разі абсолютної провідності включень (рис. 22):

$$q_{\text{кр. ромб. і.}}^{(\infty)} = \frac{2(\ln \lambda - \ln 2)}{\pi}; \quad (33)$$

– для непровідних включень:

$$q_{\text{кр. ромб. і.}}^{(0)} = \frac{\pi}{2(\ln \lambda^{-1} - \ln 2)}. \quad (34)$$

4.5) Для гексагонального масиву круглих абсолютно провідних включень з інтерфейсом (рис. 23) оцінка асимптотично еквівалентною функцією має вигляд:



$$f_1(\tilde{\lambda}) = \frac{2\tilde{\Delta}^{(1)}}{\sqrt{1-\tilde{\Delta}^{(1)}}} \sim \frac{2(\tilde{\Delta}-1)^{\frac{3}{2}} (\tilde{\lambda}/2)^{\frac{1}{4}}}{\tilde{\Delta}^{\frac{1}{2}} (\tilde{\Delta}+1)^{\frac{1}{4}} \ln \tilde{\Delta}} = f_0(\tilde{\lambda}), \quad (35)$$

де $\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{\lambda}}{2} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}$, $\tilde{\Delta}^{(1)} = \frac{\tilde{\lambda}-1}{\tilde{\lambda}+1}$.

Рисунок 23 – Композит гексагональної структури з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз

4.6) Асимптотичні вирази приведенного параметра отримуємо відповідно для абсолютно провідних та непровідних включень з інтерфейсом у вигляді:

$$q_{\text{гекс.і.}}^{(\infty)} = \frac{\pi\lambda\sqrt{3}}{2(\ln\lambda - \ln 2)}; \quad q_{\text{гекс.і.}}^{(0)} = \frac{2\lambda(\ln\lambda^{-1} - \ln 2)}{\pi\sqrt{3}}. \quad (36)$$

Розділ 5 присвячений аналізу умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

5.1) Розглянуто моделі двофазних волокнистих композитів з точки зору структурних особливостей на межі розділу їх фаз. Математично описано різні умови контакту «матриця – включення» в композитних структурах (рис. 24-29).

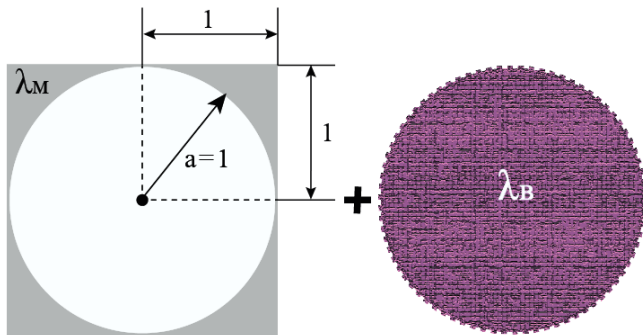


Рисунок 24 – Структура композиту: каркас із матеріалу матриці з круглими включеннями

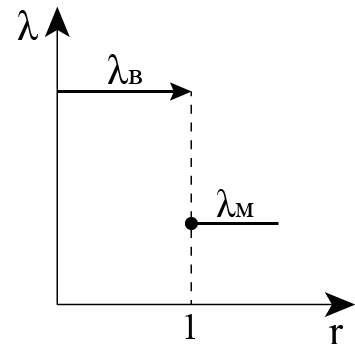


Рисунок 25 – Функція провідності у разі розділених прошарком матриці круглих включень

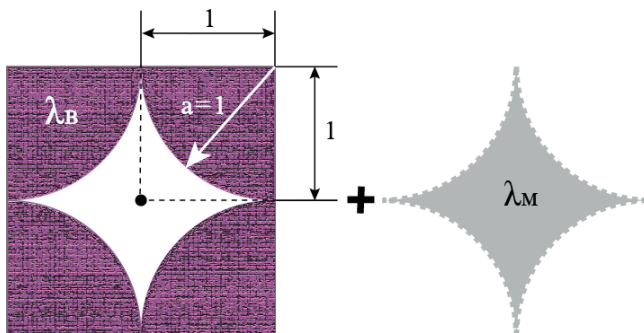


Рисунок 26 – Структура композиту: каркас із матеріалу включень із криволінійними ромбічними вставками

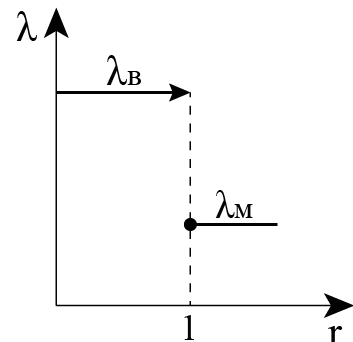


Рисунок 27 – Функція провідності у разі контакту круглих включень

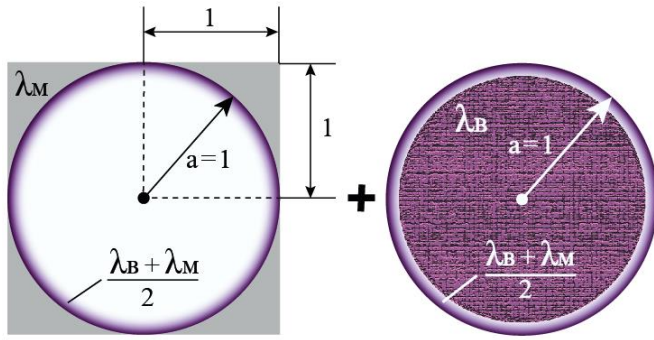


Рисунок 28 – Структура композиту: тонкий прошарок на межі розділу фаз, що характеризується середнім значенням провідностей матриці та включення

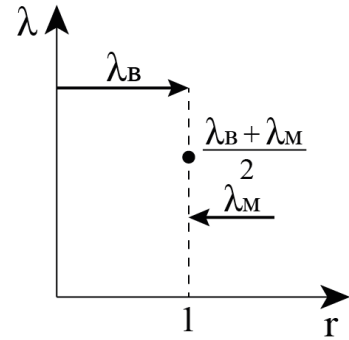


Рисунок 29 – Функція провідності в разі контакту фаз по прошарку із середнім значенням провідностей

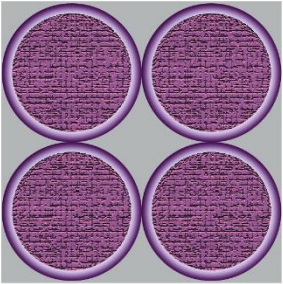
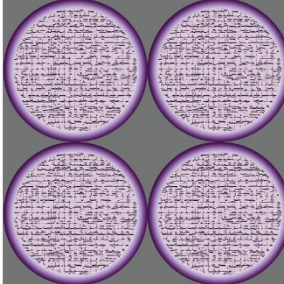
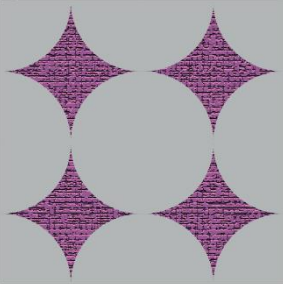
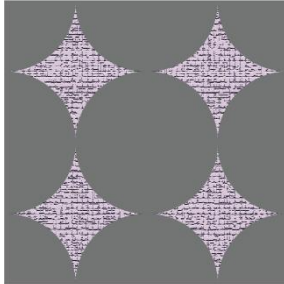
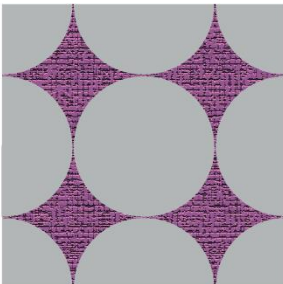
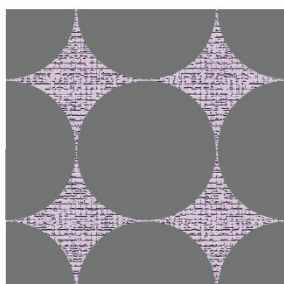
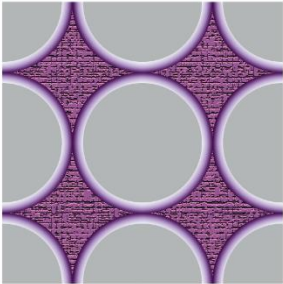
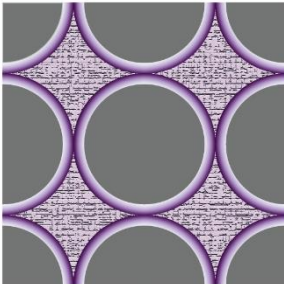
5.2) Проаналізовано асимптотичні наближення в моделях двофазних волокнистих композитів: поняття «матриця» і «включення»; «абсолютно провідні» і «непровідні» включення. Визначено поняття фізичної еквівалентності композитних структур та наведено співвідношення для ефективних параметрів фізично еквівалентних композитних структур $q_{\text{еф.}}^{(1)}$ і $q_{\text{еф.}}^{(2)}$: $q_{\text{еф.}}^{(1)}(\lambda) = \lambda q_{\text{еф.}}^{(2)}(\lambda^{-1})$.

5.3) Класифіковано асимптотичні розкладення ефективних параметрів композитів різної структури – за умовами контакту на межі розділу їх фаз (табл. 3).

Таблиця 3 – Асимптотичні вирази ефективних параметрів композитів різної структури

Структура композита	Асимптотичний вираз ефективного параметра	Структура композита	Асимптотичний вираз ефективного параметра
1. Круглі абсолютно провідні включення $\lambda \rightarrow \infty$		2. Круглі непровідні включення $\lambda \rightarrow 0$	
	1.1. Контакт по матеріалу матриці (криволінійним ромбам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$		2.1. Контакт по матеріалу матриці (криволінійним ромбам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi}$
	1.2. Контакт по матеріалу включень (колам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \frac{2\lambda}{\pi}$		2.2. Контакт по матеріалу включень (колам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \frac{\pi\lambda}{2}$

Кінець таблиці 3

	<p>1.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр.}}{\lambda_{кр. ромб.}}$ $q = \frac{\pi \lambda}{2 \ln \lambda}$		<p>2.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр.}}{\lambda_{кр. ромб.}}$ $q = \frac{2 \lambda \ln \lambda^{-1}}{\pi}$
<p>3. Криволінійні ромбічні абсолютно провідні включення $\lambda \rightarrow \infty$</p>		<p>4. Криволінійні ромбічні непровідні включення $\lambda \rightarrow 0$</p>	
	<p>3.1. Контакт по матеріалу матриці (колам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{\pi}{2}$		<p>4.1. Контакт по матеріалу матриці (колам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{2}{\pi}$
	<p>3.2. Контакт по матеріалу включень (криволінійним ромбам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi}$		<p>4.2. Контакт по матеріалу включень (криволінійним ромбам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$
	<p>3.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{2 \ln \lambda}{\pi}$		<p>4.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{\pi}{2 \ln \lambda^{-1}}$

Показано, що для представлених моделей композитів виконується співвідношення формули Дихне для «додаткових систем».

В розділі 6 розглядається задача побудови вищих наближень формули Максвелла.

6.1) Розроблено двофазну модель композиту з малими включеннями квадратного перерізу, математичний опис якої здійснюється за теорією осереднення з подальшим застосуванням асимптотичних спрощень методу збурення форми межі.

6.2) На основі двофазної моделі знайдено розв'язок задачі та проведено асимптотичний аналіз залежностей, отриманих альтернуючим методом Шварца. На підставі чисельних оцінок запропоновано критерій того, яке включення можна вважати «малим».

6.3) Побудовані ітерації вищих порядків за методом Шварца розв'язку задачі в рамках двофазної моделі композиту з урахуванням форми включень квадратного профілю, що складають просту квадратну решітку. Показано, що головний член асимптотичного розв'язку співпадає з класичною формулою Максвелла.

6.4) Побудовані вищі наближення та знайдені аналітичні вирази, що уточнюють формулу Максвелла, для волокнистих композитів із круглими включеннями. За N-ітераційною процедурою методу Шварца отримано вираз ефективного коефіцієнта теплопровідності у вигляді:

$$q_{\text{ШВ(N)}} = q_{\text{ФМ}} + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi^2 a^6}{4} \frac{(\lambda - 1)^2}{\left(\lambda \left(1 - \frac{\pi a^2}{4} \right) + 1 + \frac{\pi a^2}{4} \right)^2} \left(\Delta_1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4} \Delta_2 \right), \quad (37)$$

$$\text{де } \Delta_1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\pi \ell)^{4n-2} a^{8n-4}}{2^{2n-2} (2n-1)(4n-1)!}; \quad \Delta_2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \sum_{j=1}^{\infty} S_j j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (\pi j)^{4m-2} a^{8m-4}}{(2m-1)(4m-1)!(4m-3)!} \times$$

$$\times \left((\pi \ell)^{4m-2} S_{\ell} + \sum_{k=1}^m (-1)^{\ell+k+1} \frac{(4k-3)! (\pi \ell)^{4m-4k}}{2^{2k-2} \text{sh } \pi \ell} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\pi \ell)^{4n-2} a^{8n-4}}{2^{2n-1} (2n-1)(4n-1)!}; \quad (38)$$

$$S_n = \left(e^{-\pi n} \text{Im} E_1(-\pi n + i\pi n) - e^{\pi n} \text{Im} E_1(\pi n + i\pi n) + \pi e^{-\pi n} \right) / \text{sh } \pi n; \quad (39)$$

$i = \sqrt{-1}$; $\text{Im} E_1$ – уявна частина інтегральної показової функції.

6.5) Проведено асимптотичний аналіз розв'язку на основі N-ітераційної процедури методу Шварца та надано оцінку меж його застосування. Показано, що при великих розмірах включень ($a > 0,8$) великої ($\lambda > 10$) або малої ($\lambda < 0,1$) провідності істотною стає поправка формули Максвелла, знайдена методом Шварца.

6.6) Узагальнено співвідношення формули Максвелла для круглих включень, побудовані за допомогою розкладення Шварца – Паде.

Представимо вираз приведенного параметра за методом Шварца у вигляді:

$$q = 1 + 2 \sum_{j=1}^9 \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4} \right)^j + \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^3 \frac{\pi^4 a^{10}}{4^3} \left(1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4} \right)^2 \left(\delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)} \frac{\pi^4 a^8}{4^4} + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi^3 a^6}{4^3} \delta_2^{(11)} \right), \quad (40)$$

враховуючи члени, порядок яких не перевищує a^{18} при $n = 2, m = 1$ в рядах:

$$\delta_1^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell^{4n-1} \frac{(-1)^{n+1} 2^{6n-2}}{(2n-1)(4n-1)!}; \quad \delta_2^{(mn)} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{8m-4}}{(2m-1)(4m-1)!(4m-3)!} \frac{(-1)^{n+1} 2^{6n-3}}{(2n-1)(4n-1)!} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\infty} S_j j^{4m-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{4n-1} \left((\pi \ell)^{4m-2} S_{\ell} + \sum_{k=1}^m (-1)^{\ell+k+1} \frac{(4k-3)! (\pi \ell)^{4m-4k}}{2^{2k-2} \text{sh } \pi \ell} \right). \quad (41)$$

Розкладення Шварца – Паде знаходимо у спосіб:

– перебудуємо вираз (40) у Паде $[0/18]$ за розміром включення a , тобто записуємо так звану «зворотну» складову $q_{[0/18]}(\lambda, a)$;

– перебудуємо в Паде $[18/0]$ за розміром включення a вираз $q_{[18/0]}^{-1}(\lambda^{-1}, a)$ отримавши «пряму» складову;

– зрощуємо Паде-апроксиманти $q_{[0/18]}(\lambda, a)$ і $q_{[18/0]}^{-1}(\lambda^{-1}, a)$ за провідністю включень λ у триточкову апроксимацію Паде: $q(a, \lambda) = \frac{q_{[18/0]}^{-1}(\lambda^{-1}, a)}{\lambda + 1} + \frac{\lambda q_{[0/18]}(\lambda, a)}{\lambda + 1}$.

Тоді отримуємо аналітичний вираз приведенного параметра теплопровідності $Q_{ШВ-П}$, знайдений методом Шварца – Паде:

$$Q_{ШВ-П} = \frac{1}{\lambda + 1} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^9 \Delta^j + \Delta^3 \pi a^4 (1 + \Delta)^2 \delta_1^{(1)} - \Delta^4 \frac{\pi^3 a^8}{4^2} (1 + 2\Delta) \delta_2^{(11)} + \Delta^3 \frac{\pi^5 a^{12}}{4^4} \delta_1^{(2)} \right] + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \left[1 + 2 \sum_{j=1}^9 (-\Delta)^j - \Delta^3 \pi a^4 (1 - \Delta)^2 \delta_1^{(1)} - \Delta^4 \frac{\pi^3 a^8}{4^2} (1 - 2\Delta) \delta_2^{(11)} - \Delta^3 \frac{\pi^5 a^{12}}{4^4} \delta_1^{(2)} \right]^{-1}, \quad (42)$$

де $\Delta = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4}$; $\delta_1^{(1)}$, $\delta_1^{(2)}$, $\delta_2^{(11)}$ визначаються формулами:

$$\delta_1^{(1)} = \frac{8}{3} \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell^3; \quad \delta_1^{(2)} = -\frac{64}{945} \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell^7; \quad \delta_2^{(11)} = \frac{32}{9} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left((\pi \ell)^2 S_{\ell} + \frac{(-1)^{\ell+2}}{\sinh \pi \ell} \right) \ell^3 \sum_{j=1}^{\infty} S_j j^3. \quad (43)$$

Розкладення Шварца – Паде (42), (43) потрапляє у «вилку» Хашина – Штрікмана й асимптотично, з точністю до членів порядку a^{14} включно, задовольняє теорему Келлера. Розв'язок придатний для висококонтрастних фаз композиту з об'ємною часткою включень, дуже близькою до фізично можливого максимального значення $a \approx 0,996$. Результати дослідження підтверджуються порівнянням з відомими чисельними та асимптотичними даними інших авторів (рис. 30).

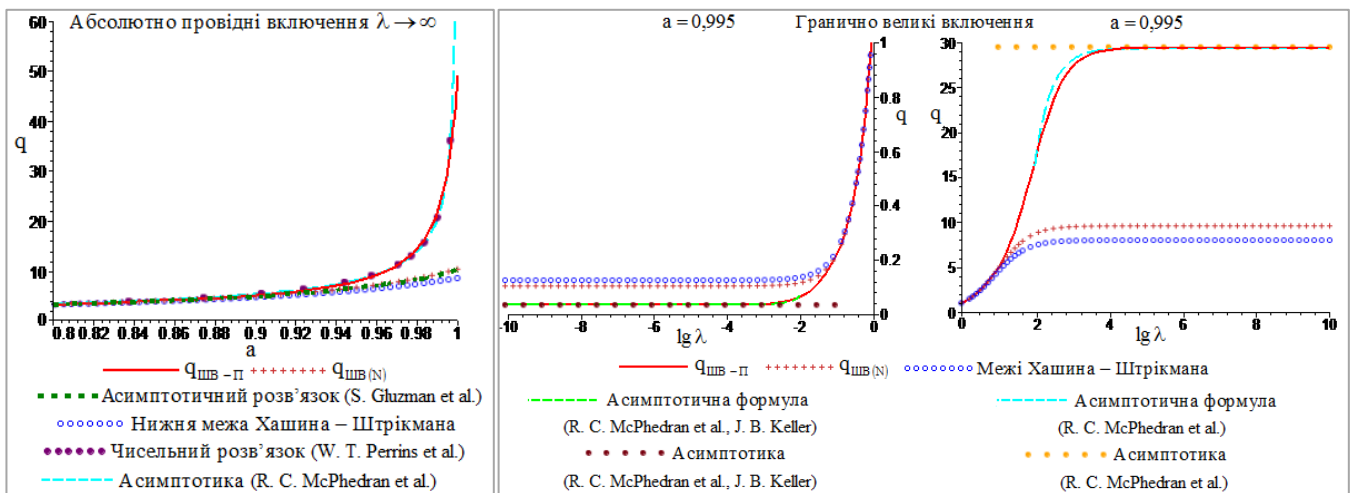


Рисунок 30 – Графіки ефективного коефіцієнта теплопровідності в залежності:
 а) від розміру a для ідеально провідних включень $\lambda \rightarrow \infty$
 б) від провідності λ для включень гранично великого розміру $a = 0,995$

6.7) Досліджено питання асимптотичної гомогенізації вищого порядку для динамічних задач. Розглядаються системи з неперервними та кусково-неперервними параметрами, дискретні системи, неперервні системи з дискретними елементами.

Для 1D кусково-неперервної системи задача зводиться до дисперсійного трансцендентного рівняння:

$$\cos(2\pi/R) = \cos \Omega \cos(\alpha \Omega) - B \sin \Omega \sin(\alpha \Omega), \quad (44)$$

де $B = \frac{\beta^2 + 1}{2\beta}$; $\Omega = \frac{\omega(1-c)d}{r_1}$; $\alpha = \frac{cr_1}{(1-c)r_2}$; $\beta = \frac{\sqrt{E^m \rho^m}}{\sqrt{E^{in} \rho^{in}}}$; $r_1 = \sqrt{\frac{E^m}{\rho^m}}$; $r_2 = \sqrt{\frac{E^{in}}{\rho^{in}}}$; $R = \frac{L_v}{d}$;

L_v – довжина хвилі; d – довжина комірки.

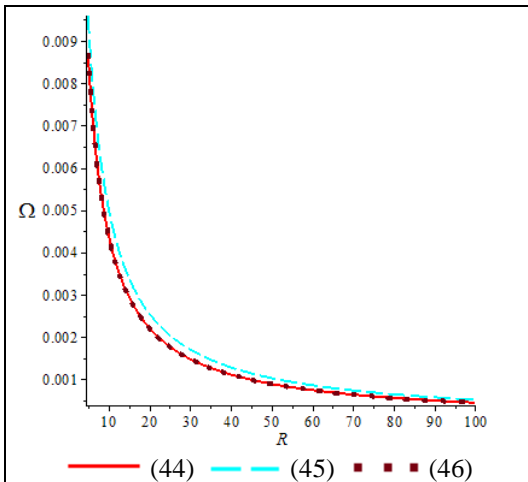


Рисунок 31 – Порівняння чисельного та асимптотичного розв'язків для випадку високої контрастності

Для низькочастотних коливань висококонтрастних композитів з включеннями сумірної довжини має місце асимптотичне представлення

$$\cos(2\pi/R) = \cos(\Omega_a \varepsilon_2 \alpha) - 0,5 \Omega_a \sin(\Omega_a \varepsilon_2 \alpha) \quad (45)$$

і приблизна оцінка:

$$\Omega = 2 \sin(\pi/R) / \left(a \sqrt{1 + 1/(2ba)} \right). \quad (46)$$

Подані на рис. 31 результати розрахунків вказують на достатню точність як асимптотики (45), так і приблизної оцінки (46) для $\alpha = 100$, $\beta = 0,01$ щодо опису низькочастотних коливань висококонтрастних композитів з включеннями сумірної довжини.

У розділі 7 розглядається застосування методу несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу до розв'язку задач механіки для періодичних структур.

7.1) Представлені основні математичні співвідношення для пилкоподібної кусково-лінійної функції $\tau(x)$ (рис. 32, 33):

$$\tau(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{при } -(1+\theta) \leq x \leq (1+\theta) \\ k_2 (x-2) & \text{при } (1+\theta) \leq x \leq (3-\theta) \end{cases}, \text{ де } k_1 = \frac{1}{1+\theta}, k_2 = -\frac{1}{1-\theta}; \quad (47)$$

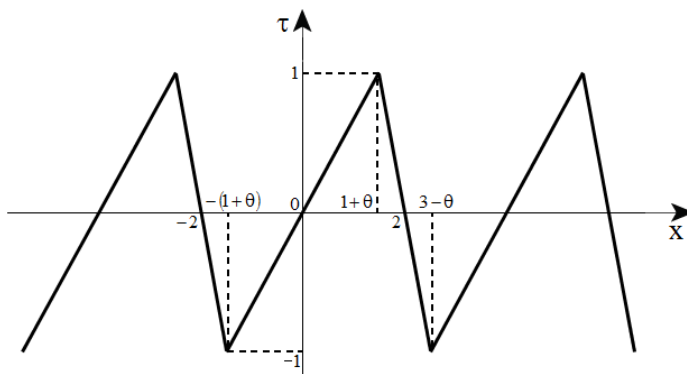


Рисунок 32 – Графік пилкоподібної функції $\tau = \tau(x)$

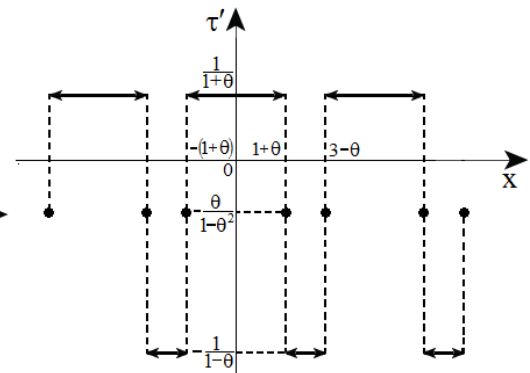


Рисунок 33 – Графік похідної пилкоподібної функції $\tau'(x)$

Параметр θ ($-1 \leq \theta \leq 1$) характеризує нахил зубів «пили». Значення $\theta = 0$ відповідає симетричній пилкоподібній функції.

Використання функції $\tau = \tau(x)$ як нового аргументу дозволяє представити будь-яку неперервну $4a$ -періодичну функцію $f(x)$ у вигляді:

$$f(x) = P(\tau) + Q(\tau) \cdot \tau', \text{ де } \tau = \tau(x/a); \quad (48)$$

$$P(\tau) = 0,5 \left\{ (1 + \theta) f[(1 + \theta)a\tau] + (1 - \theta) f[(2 - (1 - \theta)\tau)a] \right\}; \quad (49)$$

$$Q(\tau) = 0,5(1 - \theta^2) \left\{ f[(1 + \theta)a\tau] - f[(2 - (1 - \theta)\tau)a] \right\}. \quad (50)$$

7.2) Проілюстровано застосування методу несиметричного τ -перетворення до розв'язку періодичної задачі теорії пружності на прикладі задачі для двофазного шаруватого композитного масиву. В термінах τ -функції задача на комірці записується у вигляді:

$$\frac{d^2 U_1}{d\tau^2} = T_{U_1}^{(1)} X_1 + T_{U_1}^{(2)} X_2, (U_1 \rightarrow U_2); U_2 \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \left\{ \frac{dU_1}{d\tau} T_{U_1} + \frac{dU_2}{d\tau} T_{U_2} \right\} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad (51)$$

$$\text{де } T_{U_1}^{(1)} = \frac{a^2 k_2}{(k_1 - k_2) k_1^2 (\lambda_1 + 2\mu_1)}, T_{U_1}^{(2)} = T_{U_1}^{(1)} (1 \leftrightarrow 2); T_{U_2}^{(1)} = -\frac{T_{U_1}^{(1)}}{k_2}, T_{U_2}^{(2)} = T_{U_2}^{(1)} (1 \leftrightarrow 2);$$

$$T_{U_1} = k_1 (\lambda_1 + 2\mu_1) - k_2 (\lambda_2 + 2\mu_2), T_{U_2} = k_1^2 (\lambda_1 + 2\mu_1) - k_2^2 (\lambda_2 + 2\mu_2); \quad (52)$$

$$\frac{d^2 V_1}{d\tau^2} = T_{V_1}^{(1)} Y_1 + T_{V_1}^{(2)} Y_2, (V_1 \rightarrow V_2); V_2 \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \left\{ \frac{dV_1}{d\tau} T_{V_1} + \frac{dV_2}{d\tau} T_{V_2} \right\} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad (53)$$

$$\text{де } T_{V_1}^{(1)} = \frac{a^2 k_2}{(k_1 - k_2) k_1^2 \mu_1}, T_{V_1}^{(2)} = T_{V_1}^{(1)} (1 \leftrightarrow 2); T_{V_2}^{(1)} = -\frac{T_{V_1}^{(1)}}{k_2}, T_{V_2}^{(2)} = T_{V_2}^{(1)} (1 \leftrightarrow 2);$$

$$T_{V_1} = k_1 \mu_1 - k_2 \mu_2, T_{V_2} = k_1^2 \mu_1 - k_2^2 \mu_2; (V \rightarrow W). \quad (54)$$

Графіки переміщення $V(\tau)$ на періоді представлені на рис. 34, де μ_1, μ_2 визначають жорсткісні характеристики композиту, θ – геометричну, за допомогою r_1, r_2 задаються масові сили.

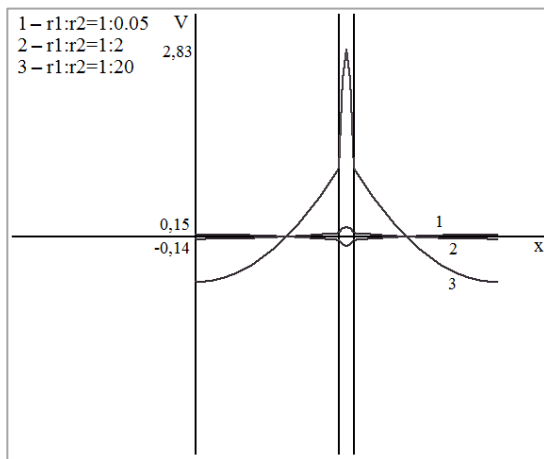


Рисунок 34 – Графіки переміщення $V(\tau)$ при $\theta = 0,9, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0,05$

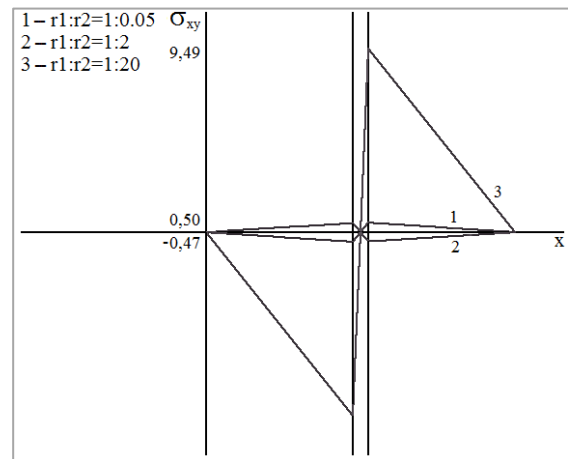


Рисунок 35 – Графіки напруги σ_{xy} при $\theta = 0,9, \mu_1 = 1, \mu_2 = 20$

На рис. 35 наведені графіки напруги σ_{xy} , що визначається співвідношенням:

$$\sigma_{xy} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} \left((\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial V_1}{\partial \tau} + T_{V_1} \frac{\partial V_2}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{k_1 - k_2} \left(T_{V_1} \frac{\partial V_1}{\partial \tau} + T_{V_2} \frac{\partial V_2}{\partial \tau} \right) \tau'. \quad (55)$$

7.3) Негладке перетворення аргументу за часом застосовано для побудови сімейства періодичних розв'язків слабо нелінійної системи при параметричному імпульсному збудженні:

$$\ddot{x} + \left[p + q \frac{\partial e(t, \theta)}{\partial t} \right] x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (56)$$

де $\varepsilon \ll 1$ – малий параметр; p і q – постійні параметри; параметричний імпульсний вплив описується другою похідною пилкоподібної кусково-лінійної функції $\tau(t, \theta)$:

$$\frac{\partial e(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tau(t, \theta)}{\partial t^2} = \frac{2}{1 - \theta^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(t + 1 + \theta - 4k) - \delta(t - 1 - \theta - 4k)]. \quad (57)$$

Негладке τ -перетворення за часом $x(t) = X(\tau) + Y(\tau)$ усуває сингулярні члени та зводить рівняння руху до крайової задачі в області комірки $-1 \leq \tau \leq 1$.

7.4) Побудовано асимптотичний розв'язок для компонентів перетворення X , Y і параметра p у вигляді рядів за степенями малого параметра ε . Розв'язок задач нульового та першого наближень приводить до співвідношень:

$$p = \lambda_j^2 - \varepsilon \left(\pm \frac{2\theta \lambda_j^2 q}{\sqrt{q^2 + \lambda_j^2}} + 3 \frac{2q^2 + \lambda_j^2}{q^2 + \lambda_j^2} A^2 \right) + O(\varepsilon^2); \quad (58)$$

$$x = A \left[\sqrt{\frac{2}{q^2 + \lambda_j^2}} (q \cos \lambda_j \tau + \lambda_j \sin \lambda_j \tau) \pm e \sqrt{2} \cos \lambda_j \tau \right] + O(\varepsilon), \quad \lambda_j = \frac{j\pi}{2}, \quad j = 1, 3, 5, \dots; \quad (59)$$

$$x = A \left[\sqrt{\frac{2}{q^2 + \lambda_j^2}} (\lambda_j \cos \lambda_j \tau - q \sin \lambda_j \tau) \pm e \sqrt{2} \sin \lambda_j \tau \right] + O(\varepsilon), \quad \lambda_j = j\pi, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (60)$$

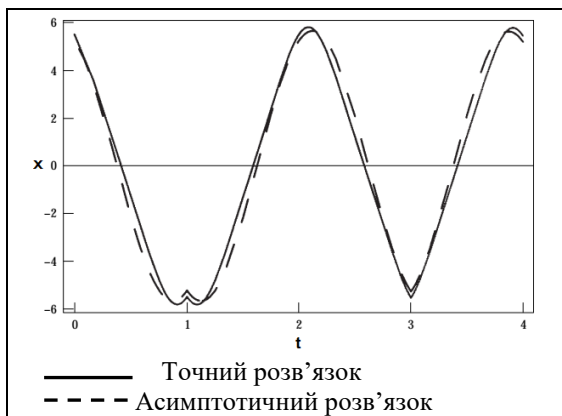


Рисунок 36 – Точний періодичний розв'язок у термінах функцій Якобі та асимптотичний розв'язок

Для $\theta = 0$ знайдено точний розв'язок задачі в термінах спеціальних функцій Якобі:

$$X = \alpha \operatorname{cn}(u\tau + v|m) = 0; \quad (61)$$

$$u = (2n + 1)K(m), \quad p = (2n + 1)^2 K^2(m) - \varepsilon \alpha^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (62)$$

$$u = 2nK(m), \quad p = 4n^2 K^2(m) - \varepsilon \alpha^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (63)$$

де $K(m)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Проведено при $\varepsilon = 0,5$, $q = 1,3$, $p = 1$, $\lambda_j = \pi$, $u = 2K(m)$, $A_0 = 4$ порівняння точного та асимптотичного розв'язків, що підтверджує їх близьку відповідність (рис. 36).

У розділі 8 досліджуються моделі континуальної апроксимації дискретних систем.

8.1) Розглядається поширення хвилі в нескінченному ланцюжку пружина-маса, що складається з матеріальних точок з масами M , які знаходяться в стані рівноваги в точках $x = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ і з'єднані пружинами з жорсткістю c (рис. 37).

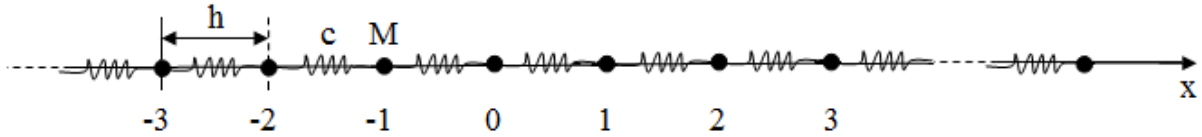


Рисунок 37 – Нескінченний ланцюжок мас

Проведено порівняльний аналіз швидкостей поширення хвиль для:

– класичної континуальної апроксимації $V_{cc}(\xi, \tau)$:

$$\frac{1}{\pi} V_{cc}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau x)}{x} \cos(2\xi x) dx = \frac{1}{2\pi} [\text{Si}(\pi(\xi + \tau)) - \text{Si}(\pi(\xi - \tau))]; \quad (64)$$

– проміжної континуальної моделі $V_{ci}(\xi, \tau)$:

$$\frac{1}{\pi} V_{ci}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau x \alpha)}{x \alpha} \cos(2\xi x) dx, \quad \alpha = \sqrt{1 - 1/3x^2 + 2/45x^4}; \quad (65)$$

– квазіконтинуальної апроксимації $V_{qc}(\xi, \tau)$:

$$\frac{1}{\pi} V_{qc}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau x \alpha)}{x \alpha} \cos(2\xi x) dx, \quad \alpha = (1 + 1/3x^2)^{-1/2}; \quad (66)$$

– уточненої квазіконтинуальної моделі $V_{qci}(\xi, \tau)$:

$$\frac{1}{\pi} V_{qci}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau \alpha)}{x \alpha} \cos(2\xi x) dx, \quad \alpha = (1 + (1 - 4\pi^{-2})x^2)^{-1/2}. \quad (67)$$

При оцінці різних континуальних апроксимацій порівняння проводиться з точним розв'язком дискретної задачі $V_d(j, \tau)$. Результати чисельного моделювання представлені на рис. 38, 39.

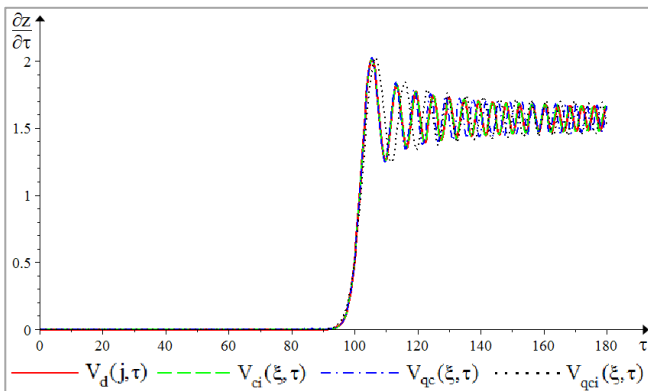


Рисунок 38 – Швидкість поширення хвиль при $\xi = 100,0$

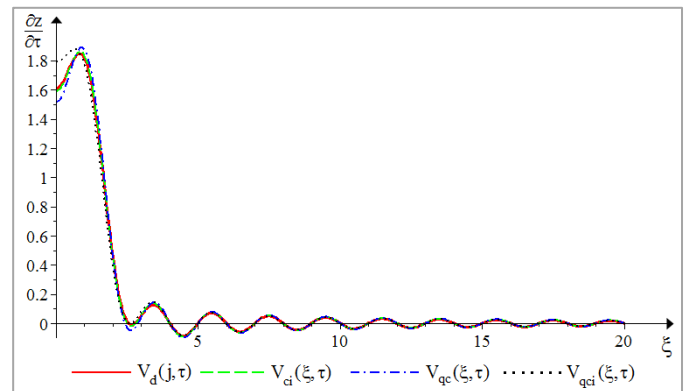


Рисунок 39 – Швидкість поширення хвиль при $\tau = 2,0$

Як показали результати чисельного моделювання, класична континуальна апроксимація з кількісної точки зору не дає задовільних результатів. Найбільш точною апроксимацією дискретного середовища є уточнене квазіконтинуальне наближення, перевага якого проявляється в тих випадках, коли необхідно описати вищі форми коливань дискретного скінченного ланцюжка.

8.2) Досліджується вплив зміни симетрії на асимптотичну поведінку хвиль при переході від дискретних до неперервних середовищ.

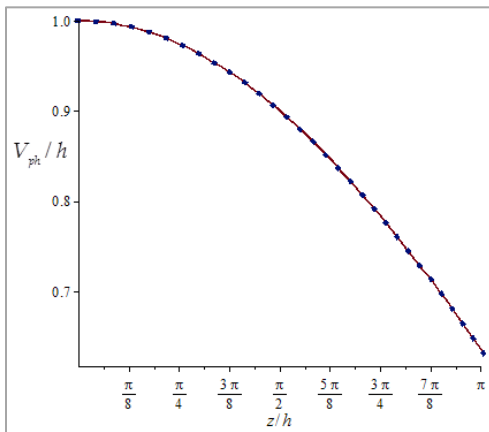
Розглянуто та проаналізовано різні неперервні наближення для дискретної моделі – решітки Лагранжа. Побудовано неперервну модель з використанням апроксимації Паде:

$$\left(1 - \beta_{L1}^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta_{L2}^2 h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right) u_{tt} = h^2 \left(u + \beta_{R1}^2 h^2 u_{xx} + \beta_{R2}^2 h^4 u_{xxxx}\right)_{xx}, \quad (68)$$

де

$$\beta_{L1}^2 = \frac{\pi^2 - 8}{4\pi^2}, \quad \beta_{L2}^2 = \frac{\pi^4 - 12\pi^2 + 24}{24\pi^4}, \quad \beta_{R1}^2 = \frac{12 - \pi^2}{6\pi^2}, \quad \beta_{R2}^2 = 0. \quad (69)$$

Порівняння фазових та групових швидкостей за дискретною моделлю та неперервною моделлю (68), (69), побудованою з використанням апроксимації Паде, показало їх хорошу відповідність (рис. 40, 41).



— Неперервна модель (68), (69) ■ ■ ■ Дискретна модель

Рисунок 40 – Порівняння фазових швидкостей для неперервної та дискретної моделей

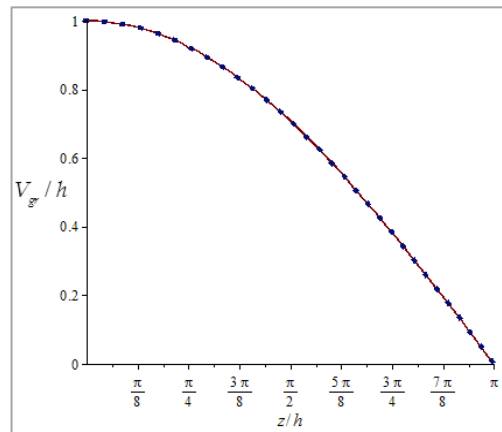


Рисунок 41 – Порівняння групових швидкостей для неперервної та дискретної моделей

8.3) Розглядається питання апроксимації дискретної функції Гріна решітки Лагранжа неперервними аналогами.

Показано, що класичне неперервне наближення G_c дає задовільні результати лише для низьких частот. Значно підвищити точність апроксимації при збереженні порядку рівняння в частинних похідних можна з використанням апарату двохточкових апроксимацій Паде, за яким функція Гріна набуває вигляду:

$$G_{cl} = \frac{i}{2\omega} \exp\left(\frac{\omega}{\sqrt{1 - \alpha^2 \omega^2}} i |\xi|\right), \quad (70)$$

де ω – частота.

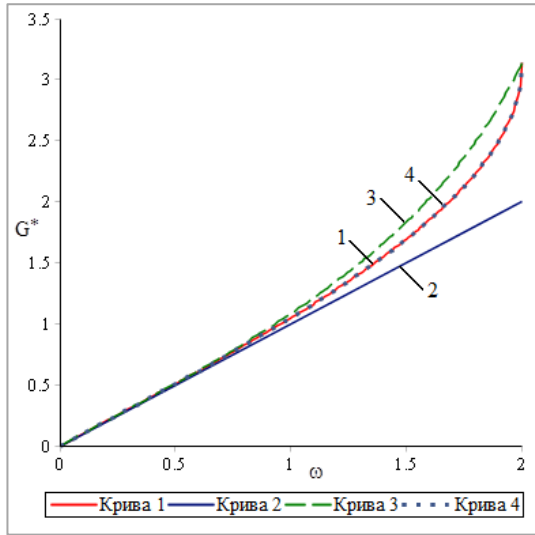


Рисунок 42 – Функції Гріна решітки Лагранжа для дискретної моделі і різних неперервних наближень

Застосовуваний метод може також бути використаним для побудови моделей вищого порядку. Для апроксимації, яка включає похідні четвертого порядку за просторовою змінною, аналітичний вираз функції Гріна визначається таким чином:

$$G_{c2} = \frac{i}{2\omega} \exp(\Omega i |\xi|), \text{ де } \Omega = \frac{\pi \sqrt{B+C}}{A}; \quad (71)$$

$$A = 2 \left[(10 - \pi^2) \omega^2 + 4\pi^2 - 36 \right]; \quad (72)$$

$$B = -\frac{A}{\sqrt{2}} \left[(\pi^2 - 8) \omega^2 - 4\pi^2 \right]; \quad (73)$$

$$C = \left[(\pi^4 + 48\pi^2 - 576) \omega^4 - (8\pi^4 + 192\pi^2 - 2304) \omega^2 + 16\pi^4 \right]^{1/2}. \quad (74)$$

На рис. 42 криві 1 і 2 показують відповідно результати розрахунку за дискретною моделлю та класичним неперервним наближенням. Криві 3 і 4 ілюструють відповідно функції $2\omega G_{c1}/i$ та $2\omega G_{c2}/i$ й показують значне покращення апроксимації порівняно з класичним неперервним випадком.

8.4) Проаналізовано поняття зосередженої сили в теорії пружності. Розв'язки класичної теорії пружності поблизу точок прикладення зосереджених навантажень можуть мати сингулярності, для усунення яких використовують перехід до різних варіантів градієнтної теорії пружності. Однак за такого підходу регуляризація приводить до підвищення порядку вихідної системи; необхідно розв'язувати нетривіальну задачу додаткових граничних умов; вирази, отримані за допомогою градієнтних теорій пружності, надто складні.

Запропоновано регуляризацію розв'язку шляхом зміни поняття зосередженої сили, а саме, заміною δ -функції Дірака інтерполяційною функцією Уіттакера – Шеннона – Котельникова. У цьому випадку використовується тільки один додатковий параметр, який характеризує мікрогетерогенність середовища.

Як приклад розглянуто аналог задачі Фламана. Знайдений розв'язок

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left\{ -\text{Im} B + \frac{2xy}{x^2 + y^2} + 2 \exp(\pi y/\ell) \frac{y^2 \sin(\pi x/\ell) - xy \cos(\pi x/\ell)}{x^2 + y^2} \right\} + \quad (75)$$

$$+ \frac{P}{4\pi G} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n+1} (\kappa - 1) \cos((2n+1)\theta)}{(2n+1)(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n} (\kappa - 1) \sin(2n\theta)}{(2n)(2n)!} \right\};$$

$$v = \frac{P}{4\pi G} \left\{ \text{Re} B - 1 + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} - 2 \exp(\pi y/\ell) \frac{y^2 \cos(\pi x/\ell) + xy \sin(\pi x/\ell)}{x^2 + y^2} \right\} + \quad (76)$$

$$+ \frac{P}{4\pi G} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n+1} (\kappa + 1) \sin((2n+1)\theta)}{(2n+1)(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n} (\kappa + 1) \cos(2n\theta)}{(2n)(2n)!} \right\},$$

де $B = 1 - (\kappa + 1) [Ci(\pi/\ell) - \gamma - \ln(\pi/\ell)]$, $Ci(\pi/\ell)$ – інтегральний косинус, не має особливостей і наближається до класичного при наближенні параметра мікронеоднорідності до нуля.

На рис. 43 проілюстровано порівняння розв'язків задачі Фламана для $u(x,0)$ і $v(x,0)$ з розв'язками (75), (76) при різних значеннях параметра мікронеоднорідності. Поведінка розв'язків (75), (76) на нескінченності збігається з поведінкою розв'язків задачі Фламана.

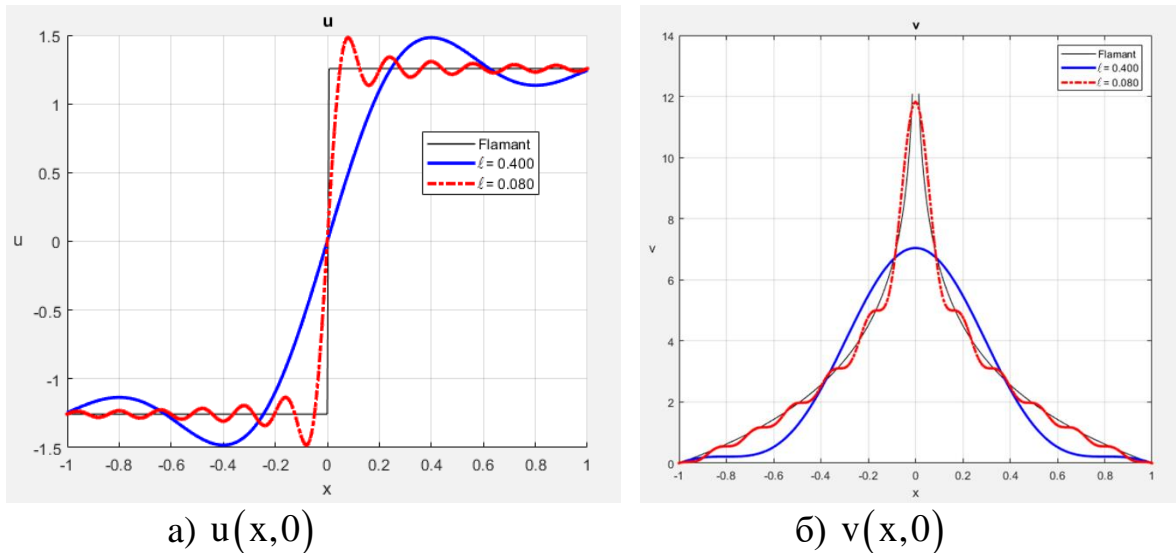


Рисунок 43 – Порівняння розв'язків задачі Фламана для $u(x,0)$, $v(x,0)$ з розв'язками (75), (76) при різних значеннях параметра мікронеоднорідності

8.5) Досліджується питання континуалізації різницевого рівняння типу Ферхюльста таким чином, щоб отримане звичайне диференціальне рівняння мало хаотичний розв'язок.

Різницеve рівняння

$$x_{n+1} - x_n = Rx_n(1 - x_n) \quad (77)$$

після заміни змінних і розкладення в ряд Маклорена зводиться до звичайного диференціального рівняння 5-го порядку, яке визначає детерміновані траєкторії:

$$h \frac{d}{dt} \left[1 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{h^3}{24} \frac{d^3}{dt^3} + \frac{h^4}{120} \frac{d^4}{dt^4} \right] y = -Ry(1 + y), \quad (78)$$

Перебудувавши в апроксимацію Паде [2/2] диференціальний оператор

$$1 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{h^3}{24} \frac{d^3}{dt^3} + \frac{h^4}{120} \frac{d^4}{dt^4} = \frac{1}{3} \frac{h^2 \frac{d^2}{dt^2} + 6h \frac{d}{dt} + 60}{h^2 \frac{d^2}{dt^2} - 8h \frac{d}{dt} + 20}, \quad (79)$$

після необхідних перетворень отримуємо:

$$h^3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 3h^2 (2 + R(1 + 2y)) \frac{d^2 y}{dt^2} + 12h(5 - 2R) \frac{dy}{dt} - \quad (80)$$

$$-48hRy \frac{dy}{dt} + 6Rh^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + 60Ry(y+1) = 0.$$

Початкові умови для рівняння (80) мають вигляд:

$$\text{при } t=0: y = \alpha; \frac{dy}{dt} = -\frac{R\alpha(1+\alpha)}{h}; \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{R^2\alpha(1+\alpha)(\alpha + (1+\alpha)(1-R\alpha))}{h^2}. \quad (81)$$

8.6) Чисельне інтегрування задачі Коші (80), (81) виконувалося методом Адамса – Башфорта – Моултона (метод предиктора-коректора).

Отримані чисельні результати можна розділити на три групи: періодичні коливання; періодичні коливання із субгармоніками; хаотичні коливання.

При $2,5 \leq R \leq 2,88$ (рис. 44-46) відбуваються періодичні коливання; незначна зміна початкових умов для функції y призводить до незначної зміни розв'язку.

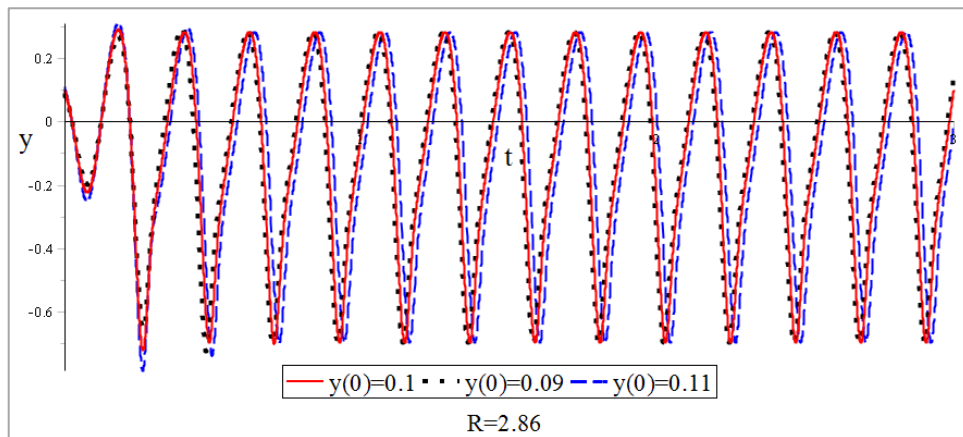


Рисунок 44 – Чисельний розв'язок задачі Коші (80), (81) при $R = 2,86$: періодичні коливання за незначної зміни початкових умов

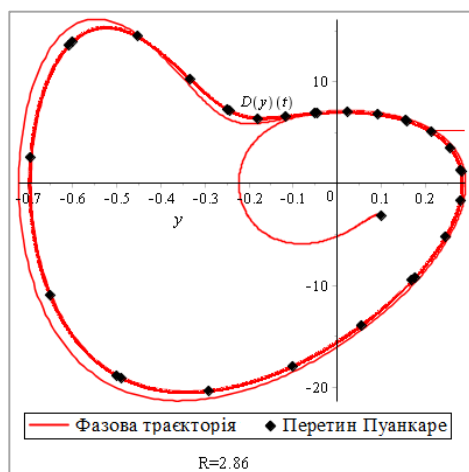


Рисунок 45 – $R = 2,86$: фазова траєкторія, перетин Пуанкаре

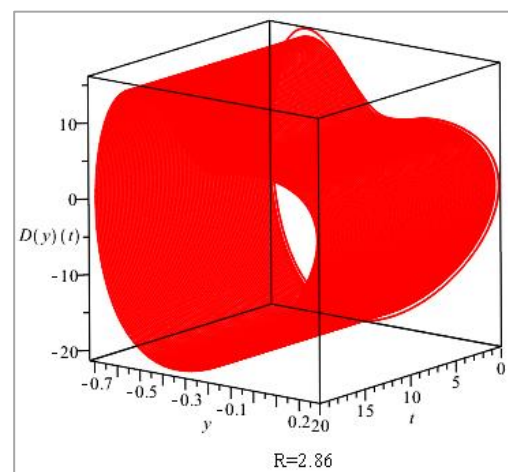


Рисунок 46 – $R = 2,86$: траєкторії у тривимірному просторі

При $2,88 < R \leq 3,0$ в періодичному розв'язку з'являються субгармоніки; при незначних змінах початкових умов для функції y характер коливань системи не зазнає істотних змін (рис. 47-49).

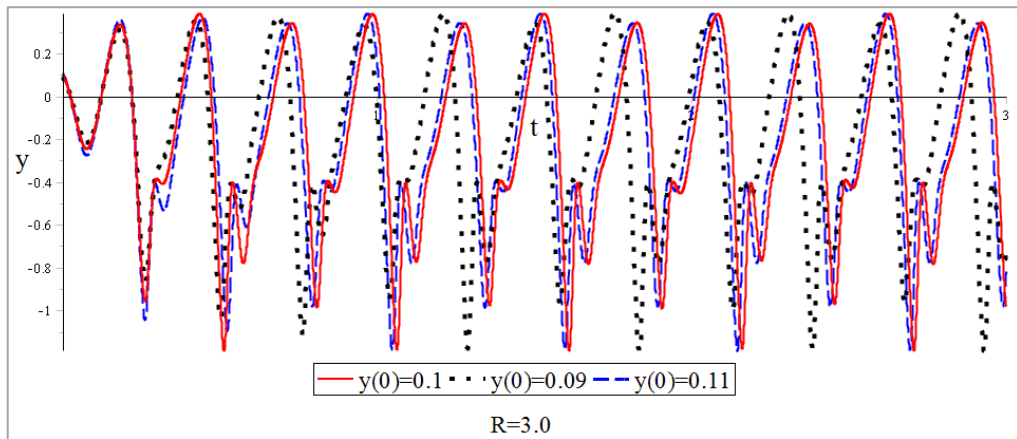


Рисунок 47 – Чисельний розв'язок задачі Коші (80), (81) при $R = 3,0$: періодичні коливання з субгармоніками за незначної зміни початкових умов

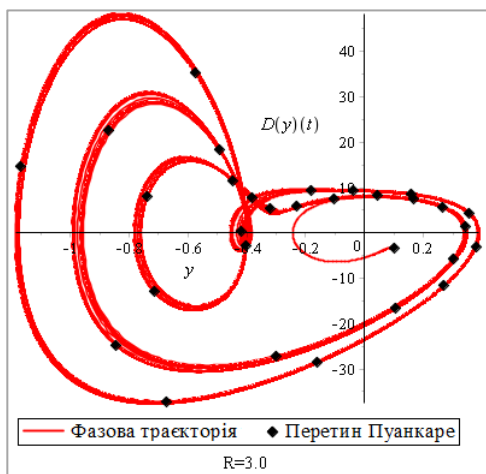


Рисунок 48 – $R = 3,0$: фазова траєкторія, перетин Пуанкаре

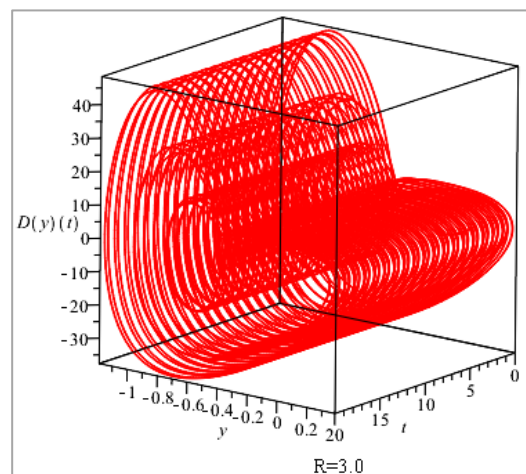


Рисунок 49 – $R = 3,0$: траєкторії у тривимірному просторі

При $R > 3,0$ система стає хаотичною; незначні зміни початкових умов призводять до суттєвих змін характеру її коливань (рис. 50-52).

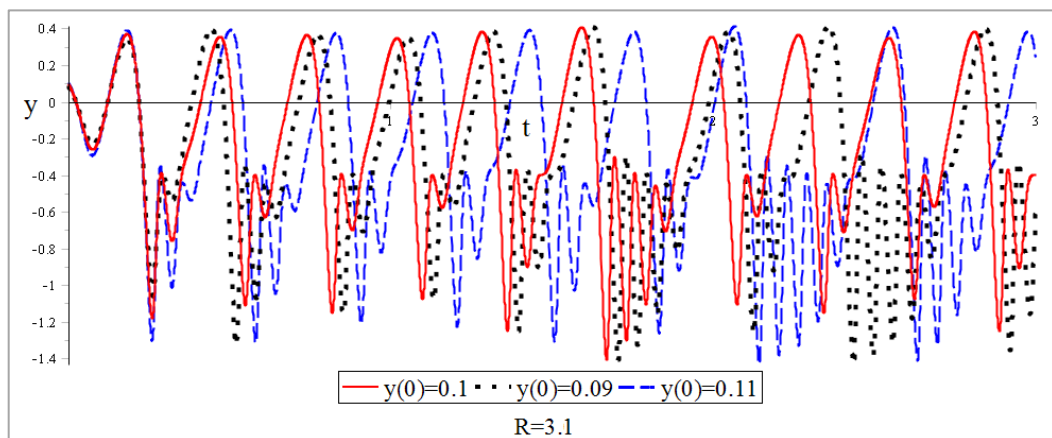


Рисунок 50 – Чисельний розв'язок задачі Коші (80), (81) при $R = 3,1$: суттєва зміна коливань за незначної зміни початкових умов

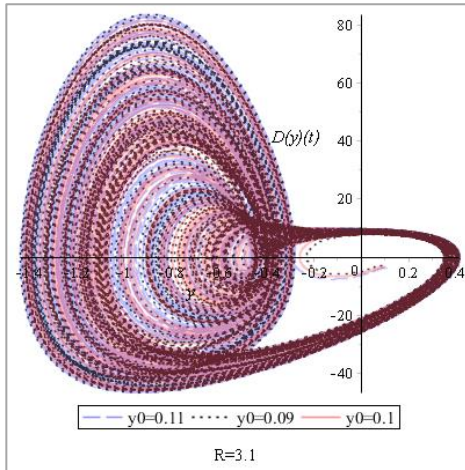


Рисунок 51 – Плоский фазовий портрет при $R = 3,1$

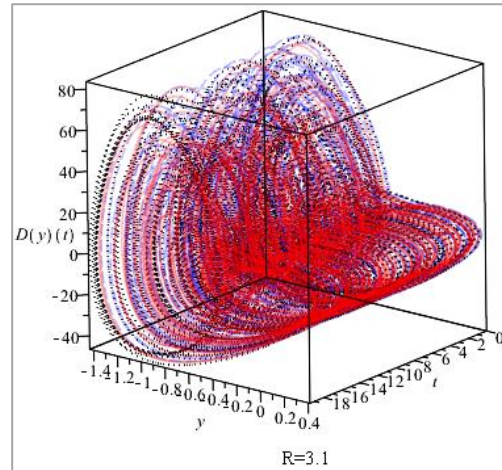


Рисунок 52 – 3D фазовий портрет при $R = 3,1$

Для коректної характеристики динаміки та підтвердження хаотичної поведінки системи були розраховані для різних значень R експоненти Ляпунова та розмірності Ляпунова (рис. 53, 54).

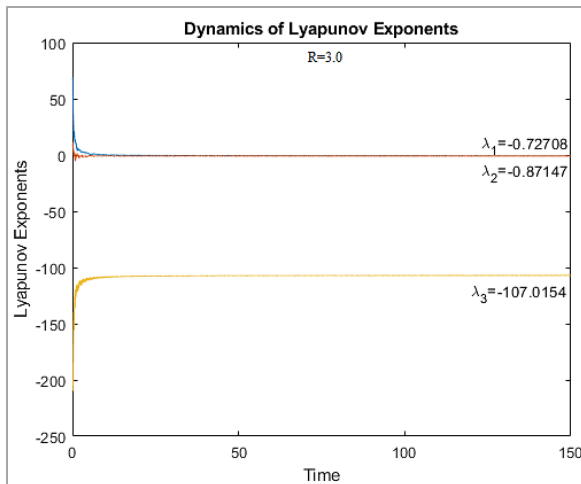


Рисунок 53 – Динаміка експонент Ляпунова при $R = 3,0$: не хаотична система

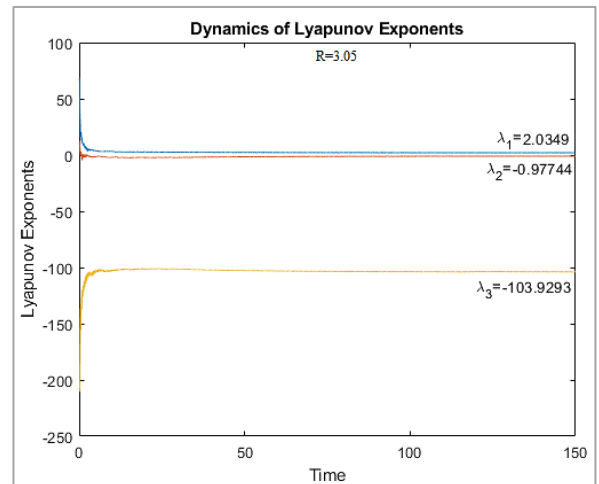


Рисунок 54 – Динаміка експонент Ляпунова при $R = 3,05$: хаотична система

Отримані розрахункові значення показників Ляпунова підтверджують зроблені висновки про відсутність чи наявності хаосу у системі. Для $R = 3,05$ і $R = 3,1$ отримуємо значення розмірностей Ляпунова:

$$D_L \Big|_{R=3,05} = 2,0102; D_L \Big|_{R=3,1} = 2,0316, \quad (82)$$

які відповідають хаотичній системі третього порядку.

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеною науковою працею, в якій досліджено важливу науково-прикладну проблему: побудовані й обґрунтовані на фізичному рівні асимптотичні моделі для аналізу макроскопічних властивостей композитних

матеріалів різної структури, розроблено строгий математичний апарат їх опису, знайдені аналітичні розв'язки задач будівельної механіки в області граничних значень фізичних і геометричних параметрів композитів, надана асимптотична й чисельна оцінка їх точності, здійснено дослідження області застосовності, проведено якісний та кількісний аналіз достовірності одержаних результатів.

Узагальнені висновки за результатами проведеного дослідження можуть бути сформульовані таким чином:

1) Проведено узагальнення трифазної моделі композиту з урахуванням форми включення.

Для композитів з циліндричними включеннями круглого і квадратного профілів на основі трифазної моделі композита знайдено розв'язки задач визначення ефективного коефіцієнта теплопровідності в нульовому наближенні та його першої поправки за методом збурення форми межі.

1.1) Для круглих включень отриманий у двочленному наближенні аналітичний розв'язок при доперколяційних значеннях розміру включення дозволяє побудувати єдиний універсальний вираз ефективного провідності композитного матеріалу, що розширює межі застосування трифазної моделі і працює для всього діапазону розмірів включень аж до порога протікання.

1.2) Для композитного матеріалу, армованого циліндричними волокнами квадратного профілю, знайдені аналітичні й асимптотичні розв'язки, які добре погоджуються між собою та з відомими результатами інших авторів – чисельними розв'язками, експериментальними даними, аналітичними співвідношеннями й асимптотичним розкладеннями. Доведено обґрунтованість, достовірність й точність отриманих результатів та їх відповідність фізичній природі задачі в усьому діапазоні зміни геометричного розміру включень a та їх фізичної характеристики λ , включаючи граничні випадки $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow 1$ і $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$.

2) Побудовані асимптотичні наближення трифазної моделі композиту, що розширюють її область застосування.

2.1) Розв'язки за трифазною моделлю композиту перебудовано за допомогою апроксимацій Паде, що дозволяє не тільки принципово розширити кількісні межі застосування моделі, а й якісно описати фізичний процес, що відбувається в композиті при великих розмірах включень $a \rightarrow 1$ гранично великої провідності $\lambda \rightarrow \infty$ – перколяційний перехід та утворення нескінченного кластеру.

2.2) Розроблено модифікований алгоритм трифазної моделі композиту, за яким ефективний параметр визначається з трансцендентного рівняння, наявність в якому природного малого параметра дає можливість коректно виконати всі граничні переходи. Проведений асимптотичний і детальний чисельний аналіз підтвердив адекватність моделі при всіх значеннях фізико-геометричних характеристик композита, включаючи асимптотичні співвідношення в граничних випадках.

3) Знайдено асимптотичні розв'язки для високопровідних щільно упакованих композитів на основі теорії змазки.

3.1) Для волокнистих композитів із включеннями квадратного профілю знайдено розв'язок задачі й отримано асимптотичне співвідношення, що характеризує стан ефективного гомогенного середовища при близьких до гранично великих значеннях розмірів включень та їх провідності. Достовірність результатів

підтверджується порівнянням в окремих випадках з відомими асимптотичними розкладами та двосторонніми оцінками з вузькою «вилкою».

3.2) Для композитів із круглими циліндричними включеннями знайдені на основі теорії змазки асимптотичні розв'язки добре описують ефективний параметр при близьких до гранично великих значеннях геометричного і фізичного параметрів структури, що підтверджується збігом головного члена асимптотики з відомою асимптотичною формулою R. C. McPhedran et al. Проведено узагальнення розв'язку на випадок великих розмірів включень малої провідності та для практично непровідних включень.

3.3) Розроблено модель теорії змазки для композитів із криволінійними ромбічними включеннями. Отримано асимптотики за геометричним і фізичним параметрами композиту: великі ($0 \ll a < 1$) абсолютно провідні ($\lambda \rightarrow \infty$) включення; включення гранично великого розміру ($a = 1$) великої, але скінченної провідності ($1 \ll \lambda < \infty$); великі ($0 \ll a < 1$) непровідні ($\lambda = 0$) включення; включення гранично великих геометричних розмірів ($a = 1$) низької провідності ($0 < \lambda \ll 1$).

3.4) Для гексагональної решітки знайдено головний член асимптотики, який співпадає з асимптотичною формулою L. Verlyand & A. Novikov, та першу поправку асимптотичного розкладення ефективного параметра для ідеально провідних включень $\lambda \rightarrow \infty$ при наближенні їх розміру до максимального $a \rightarrow 1$. Чисельне порівняння знайденого розв'язку з відомими в окремих випадках результатами інших авторів показало високу точність апроксимації моделі.

3.5) Проведено узагальнення підходу теорії змазки для включень середніх розмірів $a \leq 1/\sqrt{3}$ та отримано асимптотичний вираз ефективного параметра для випадку їх ідеальної провідності.

Розв'язок для середніх розмірів включень, перебудований належним чином за допомогою апроксимацій Паде, показує коректні результати при всіх розмірах абсолютно провідних включень, включаючи асимптотику при $a \rightarrow 1$.

Знайдені співвідношення верхньої та нижньої оцінки асимптотики приведенного параметра, «вилка» між якими вужча за межі Хашина – Штрікмана і не перевищує 3% при будь-яких значеннях розміру включень $0 \leq a < 1$, $a \rightarrow 1$.

3.6) Досліджені власні коливання мембрани з гексагональним масивом круглих включень.

В загальному вигляді знайдено розв'язок задачі про власні коливання прямокутної композитної мембрани, затиснутої по контуру. В аналітичному вигляді представлено розв'язок локальної задачі, вирази головних частин власних функцій і частот коливань та їх перші поправки. Визначено умови, за яких буде отримана ненульова перша поправка власної частоти.

3.7) З використанням перетворення Лапласа та методу асимптотичної гомогенізації досліджено нестационарну теплопровідність у волокнистих композитних матеріалах гексагональної структури. При розв'язку локальної задачі за теорією змазки гексагональна форма елементарної комірки була апроксимована шляхом введення функції змінної координати.

Розглянуто задачу для скінченної області. Як приклад досліджено випадок

охолодження прямокутної композитної області за законом охолодження Ньютона.

4) З використанням апарату асимптотично еквівалентних функцій проведено дослідження граничних станів композитних структур.

4.1) Для композитної структури з періодично розташованими циліндричними включеннями квадратного профілю шляхом зрощування асимптотичних співвідношень за розміром включень та за їх провідністю побудовано єдиний аналітичний вираз приведенного параметра теплопровідності, правомірний у всьому діапазоні зміни геометричної та фізичної характеристик композиту, включаючи їх граничні значення.

Параметр зрощування визначено за умов, що розкладення в ряд зрощеного виразу осередненого коефіцієнта співпадає з розкладенням початкових співвідношень із точністю до членів порядку a^{10} при $a \rightarrow 0$ і $(1-a)^{10}$ при $a \rightarrow 1$.

Визначені області, в яких основний внесок у вираз приведенного коефіцієнта вносять відповідні асимптотичні співвідношення.

4.2) Розроблено й обґрунтовано математичний апарат на основі методу несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу для опису локальних та дискретно змінюваних властивостей композиту.

Знайдено аналітичні співвідношення переходу від пилкоподібного до початкового гладкого аргументу за методом асимптотично еквівалентних функцій.

Побудовано модель і знайдено асимптотичний розв'язок для волокнистого композиту у випадку ідеально провідних круглих включень при наявності тонкого інтерфейсу на межі розділу фаз.

Показано, що застосування математичного апарату τ -перетворення й асимптотично еквівалентних функцій дозволяє: з математичної точки зору – врахувати локальні ефекти на межі розділу фаз композиту, які неможливо описати безпосередньо в рамках теорії осереднення; з фізичної точки зору – значно розширити клас структур композитів, які можуть бути досліджені в рамках єдиного запропонованого підходу.

4.3) На основі техніки τ -перетворення і методу асимптотично еквівалентних функцій побудовано фізичну модель та знайдено математичні співвідношення, що описують контакт непровідних круглих включень з інтерфейсом на межі розділу фаз композиту. Отримано асимптотичне співвідношення для ефективного коефіцієнта теплопровідності, яке є інверсією виразу для абсолютно провідних включень.

Знайдені розв'язки алгебраїчно точно задовольняють теорему Келлера, що підтверджує фізичну адекватність моделі.

4.4) Отримано асимптотичні співвідношення для композитів з криволінійними ромбічними включеннями за наявності інтерфейсу на межі розділу фаз. Розроблений підхід узагальнено на випадок контакту непровідних криволінійних ромбічних включень з тонким прошарком на межі розділу фаз композиту.

4.5) Для гексагонального масиву круглих включень, що торкаються по тонкому міжфазному інтерфейсу, побудовано модель композиту, яка математично описується аналітичними співвідношеннями методів пилкоподібного перетворення аргументу й асимптотично еквівалентних функцій. Знайдено асимптотичний вираз ефективного параметра композиту для абсолютно провідних включень з інтерфейсом, головний член якого співпадає з відомим результатом R. W. O'Brien.

4.6) Здійснено асимптотичну оцінку ефективної провідності гексагонального масиву непровідних круглих включень за наявності інтерфейсу на межі розділу фаз. Показано, що знайдені асимптотичні співвідношення для абсолютно провідних і непровідних включень задовольняють теорему Келлера.

5) Проведено аналіз умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

5.1) Розглянуто фізичний зміст і надано математичний опис різних структурних моделей двофазних волокнистих композитів за умовами контакту «матриця – включення».

5.2) Визначені асимптотичні наближення в моделях двофазних волокнистих композитів: поняття «матриця» і «включення»; ідеалізації провідності включень як то «абсолютно провідні» і «непровідні».

Проаналізовано поняття фізичної еквівалентності композитних структур та наведено співвідношення зв'язку їх ефективних параметрів.

5.3) Класифіковано асимптотичні розкладення ефективних параметрів композитів різної структури за умовами контакту на межі розділу їх фаз: по матеріалу матриці; по матеріалу включень; за наявності інтерфейсу. Показано, що для представлених моделей композитів виконується співвідношення формули Дихне для «додаткових систем».

б) Побудовані вищі наближення формули Максвелла.

6.1) Розроблено двофазну модель волокнистого композиту з малими включеннями квадратного профілю, математичний опис якої здійснюється за допомогою теорії осереднення з подальшим застосуванням асимптотичних спрощень методу збурення форми межі і альтернуючого методу Шварца.

6.2) Знайдено розв'язок задачі методом Шварца для композиту з циліндричними включеннями малого розміру на основі двофазної моделі композиту. На підставі чисельних оцінок визначено область застосування розв'язку і запропоновано критерій того, яке включення практично можна вважати «малим».

6.3) Побудовані ітерації вищих порядків методу Шварца розв'язку задачі в рамках двофазної моделі композиту. Аналітично доведено, що головний член асимптотичного розкладення ефективного параметра в разі квадратних циліндричних включень малої концентрації представляє собою формулу Максвелла.

Ефективність застосування двофазної моделі композиту обумовлена тим, що на відміну від формули Максвелла, в якій не ураховується форма включень і ефективна провідність визначається лише їх концентрацією, запропонована модель розроблена саме для включень квадратного профілю, що складають просту квадратну решітку.

6.4) Побудовані вищі наближення формули Максвелла для волокнистих композитів із круглими включеннями за узагальненою N -ітераційною процедурою методу Шварца. Отримано вираз приведенного коефіцієнта, який асимптотично, з точністю до членів порядку a^{14} включно, задовольняє теорему Келлера.

6.5) Здійснено асимптотичний аналіз розв'язку на основі N -ітераційної процедури методу Шварца та надано оцінку меж його застосування. Отримано, що перша ненульова поправка формули Максвелла має порядок a^{10} , що якісно збігається з результатом, отриманим V. Mityushev для непровідних порожнин. Сума головної

частини асимптотичного розкладення та першої поправки до нього задовольняє теорему Келлера до членів порядку a^{2n} включно за будь-яких значень n ; похибку вносить друга поправка, порядок якої за малих значень a становить a^{16} . Показано, що N -ітераційну поправку слід урахувувати для композитів з великими включеннями ($a \gg 0$) великої ($\lambda \gg 1$) або малої ($\lambda \ll 1$) провідності: вона вносить істотний вклад в ефективну провідність структури у порівнянні з формулою Максвелла.

6.6) Уточнено формулу Максвелла із застосуванням техніки Паде-апроксимацій.

При перебудові N -ітераційного розв'язку за методом Шварца визначаються «пряма» і «зворотна» складові – Паде-апроксимації за розміром включення a , які потім зрощуються в триточкову апроксимацію Паде за провідністю включень λ . Аналітичний вираз осередненого коефіцієнта за методом Шварца – Паде має значно ширшу область застосування: працює з достатньою для практичних цілей точністю для включень будь-якої провідності ($0 \leq \lambda < \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$) при їх розмірах $0 \leq a \leq 0,996$.

6.7) Здійснено асимптотичне осереднення вищого порядку для динамічних задач: розглянуто системи з неперервними параметрами; системи з періодично сконцентрованими дискретними елементами; 1D кусково-неперервні системи.

Точність одержаних наближень оцінена числовим моделюванням. Проведено порівняння чисельного й асимптотичного розв'язків для випадку високої контрастності; точного, гомогенізованого і високочастотного асимптотичного розв'язків у разі низької контрастності та хвиль різної довжини.

7) Обґрунтовано застосування техніки негладкого пилкоподібного перетворення аргументу до розв'язку задач механіки періодичної структури.

7.1) Визначено поняття несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу. Сформульовано основні властивості τ -функції та її похідної. Знайдено співвідношення для перетворення неперервної $4a$ -періодичної функції на функцію пилкоподібного аргументу.

7.2) В термінах τ -перетворення представлені математичні співвідношення періодичної задачі теорії пружності для двофазного шаруватого композита. Надано вирази крайових задач на періоді композитної структури, умови самоурівноваженості масових сил та умови виключення з періодичного розв'язку середньої складової. Знайдені асимптотичні співвідношення в граничних випадках жорсткісних та геометричних характеристик фаз композиту.

7.3) Досліджено нелінійний осцилятор при параметричному імпульсному збудженні. Для знаходження періодичних розв'язків осцилятора Дюффінга використано техніку негладкого пилкоподібного перетворення аргументу в загальному випадку: $\tau = \tau(t, \theta)$, де параметр θ характеризує нахил «пили». Показано, що запропонований підхід приводить до розв'язку в області $-1 \leq \tau \leq 1$ крайової задачі, яка не містить сингулярних функцій.

7.4) Побудовано асимптотичний розв'язок задачі для компонентів τ -перетворення за часом у вигляді рядів за степенями малого параметра ε . У випадку симетричного τ -перетворення знайдено точний розв'язок задачі в термінах спеціальних функцій Якобі. Проведено порівняння точного та асимптотичного розв'язків, яке підтвердило їх хорошу відповідність.

8) Досліджені моделі континуальної апроксимації дискретних систем.

8.1) Проведено чисельне дослідження моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів: класичної континуальної моделі; проміжної континуальної моделі; квазіконтинуальної моделі; уточненої квазіконтинуальної моделі. Порівняльний аналіз швидкостей поширення хвиль показав, що з кількісної точки зору класична континуальна апроксимація не дає задовільних результатів; найбільш точно апроксимує дискретне середовища уточнене квазіконтинуальне наближення, перевага якого проявляється, коли треба описати вищі форми коливань дискретного скінченного ланцюжка.

8.2) Проаналізовано перехід від дискретного до неперервного середовища: вплив зміни симетрії на асимптотичну поведінку хвиль. Для дискретної моделі – решітки Лагранжа проведено аналіз різних неперервних наближень, який показав хорошу відповідність континуальної апроксимації за моделлю, побудованою з використанням апроксимації Паде. Порівняння фазової та групової швидкостей показало практичний збіг результатів для дискретної і неперервної моделей.

8.3) Досліджено неперервні апроксимації функції Гріна решітки Лагранжа. Показано, що класичне неперервне наближення дає задовільні результати лише для низьких частот. Запропоновано використанням апарату двохточкових апроксимацій Паде й показано, що побудовані на його основі неперервні апроксимації добре описують дискретну функцію Гріна. Застосовуваний метод узагальнено для моделей вищого порядку.

8.4) Проаналізовано поняття зосередженої сили в теорії пружності.

Запропоновано регуляризацію розв'язку шляхом зміни поняття зосередженої сили: заміною дельта-функції Дірака інтерполяційною функцією Уіттакера – Шеннона – Котельникова. Такий підхід дає можливість використовувати лише один додатковий параметр, що характеризує мікрогетерогенність середовища.

Розглянуто аналог задачі Фламана. Знайдений розв'язок не має особливостей і наближається до класичного при наближенні параметра мікронеоднорідності до нуля. Отримані формули мають більш простий вигляд порівняно зі знайденими за градієнтною теорією пружності.

8.5) Побудовано континуальну модель дискретного рівняння Ферхюльста.

Показано, що стандартна континуалізація, заснована на рядах Маклорена, визначає детерміновані траєкторії і не має хаотичного розв'язку. Розроблено процедуру континуалізації, засновану на перетворенні диференціального оператора шляхом перебудови в діагональну апроксимацію Паде.

8.6) Доведено наявність хаосу в неперервній моделі.

Для коректної характеристики динаміки та підтвердження хаотичної поведінки системи проведено чисельний аналіз неперервної моделі, який включав: чисельний розв'язок задачі Коші для континуалізованого диференціального рівняння та належним чином складених початкових умов; аналіз характеру коливань при незначній зміні початкових умов; побудову фазової траєкторії та перетину Пуанкаре; побудову траєкторій у тривимірному просторі; розрахунок експонент Ляпунова та розмірностей Ляпунова. Визначено значення параметра R , що входить до неперервної моделі, за яких має місце відповідна динаміка: періодичні коливання; періодичні коливання із субгармоніками; хаотичні коливання.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дослідження

1. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Danishevs'kyu V. V., Tokarzewski S. Homogenization procedure and Padé approximants for effective heat conductivity of composite materials with cylindrical inclusions having square cross-section. *The Royal Society Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1999. Vol. 455. Is. 1989. P. 3401–3413 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q1).
2. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. Study of a non-linear oscillator under parametric impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 222. Is. 2. P. 307–328 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q1).
3. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Employment of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method in the elasticity theory for layered composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. Vol. 45. Is. 14. P. 3055–3060 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q1).
4. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Weicher D. Numerical investigation of 1D continuum dynamical models of discrete chain. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 92. Is. 11–12. P. 945–954 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q2).
5. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Three-phase model for a fiber-reinforced composite material. *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 95–104 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q1).
6. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Application of an improved three-phase model to calculate effective characteristics for a composite with cylindrical inclusions. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. No. 1. P. 197–222 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q2).
7. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Analytical expressions for effective thermal conductivity of composite materials with inclusions of square cross-section. *Composites: Part B*. 2013. Vol. 50. P. 44–53 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q1).
8. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part I: Application of the boundary shape perturbation method. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 154–177 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q1).
9. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part II: Application of Padé approximants. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 178–191 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q1).

10. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic analysis of the Maxwell Garnett formula using the two-phase composite model. *International Journal of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 7. No. 02. P. 1550025-1–1550025-27 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).
11. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Markert B., Starushenko G. A. Analytical homogenization for dynamic analysis of composite membranes with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017. Vol. 17. Is. 5. P. 1740015-1–1740015-14 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q1).
12. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models and transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part I: Square lattice of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 179. P. 617–627 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q1).
13. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models for transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part II: Square lattices of rhombic inclusions and hexagonal lattices of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 180. P. 351–359 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q1).
14. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S., Khajiyeva L. The Verhulst-like equations: integrable ODE and ODE with chaotic behavior. *Symmetry*. 2019. Vol. 11. Is. 12. P. 1446 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).
15. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part I: using the Schwarz alternating method. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 4971–4990 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q1).
16. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part II: using Padé approximants. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 5145–5157 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q1).
17. Andrianov I., Koblik S., Starushenko G. Transition from discrete to continuous media: the impact of symmetry changes on asymptotic behavior of waves. *Symmetry*. 2021. Vol. 13. Is. 6. P. 1008 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).
18. Andrianov I. I., Andrianov I. V., Starushenko G. A., Borodin E. I. Higher order asymptotic homogenization for dynamical problems. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 27. Is. 9. P. 1672–1687 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).
19. Andrianov I. V., Koblik S. G., Starushenko G. A., Kudaibergenov A. K. On aspects of gradient elasticity: Green's functions and concentrated forces. *Symmetry*. 2022. Vol. 14. Is. 2. P. 188 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).
20. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Non-stationary heat transfer in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *Acta*

Mechanica. 2022. Vol. 233. Is. 4. P. 1339–1350 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, кuartиль Q2).

21. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Kvitka S. A. Effective heat conductivity of a composite with hexagonal lattice of perfectly conducting circular inclusions: An analytical solution. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 102. Is. 11. P. e202200216 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, кuartиль Q2).

22. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Approximate models of mechanics of composites: An asymptotic approach : monograph. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2023. 367 p. (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Scopus*).

23. Старушенко Г. А. Асимптотические методы и модели в теории композитных материалов : монография. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2021. 696 с.

24. Pilipchuk V. N., Starushenko G. A. A version of non-smooth transformations for one-dimensional elastic systems with a periodic structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1997. Vol. 61. Is. 2. P. 265–274 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*).

25. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Tokarzewski S. Homogenization procedure and Padé approximations in the theory of composite materials with parallelepiped inclusions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1998. Vol. 41. Is. 1. P. 175–181 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*).

26. Starushenko G., Krulik N. Saw-tooth argument transformation method in the theory of composite materials // Progress and Trends in Rheology V : Proceedings of the Fifth European Rheology Conference (Portorož, September 6-11, 1998) / ed. I. Emri. Heidelberg, 1998. P. 120–121 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Web of Science*).

27. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Danishevskyy V. V. Asymptotic determination of the effective thermal conductivity of a pile field. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1999. Vol. 36. Is. 1. P. 31–36 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Scopus*, кuartиль Q4).

28. Tokarzewski S., Andrianov I., Danishevsky V., Starushenko G. Analytical continuation of asymptotic expansions of effective transport coefficients by Pade approximants. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2001. Vol. 47. Is. 4. P. 2283–2292 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, кuartиль Q3).

29. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Weichert D. Asymptotic analysis of thin interface in composite materials with coated boundary. *Technische Mechanik*. 2011. Vol. 31. No. 1. P. 33–41 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Scopus*).

30. Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W., Starushenko G. Effective conductivity and critical properties of a hexagonal array of superconducting cylinders // Contributions in Mathematics and Engineering. In Honor of Constantin Carathéodory / eds. P. M. Pardalos, T. M. Rassias. Switzerland : Springer International Publishing, 2016. P. 255–297 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Scopus*).

31. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Pacheco P. M. C. L., Savi M. A.,

Starushenko G. A. Asymptotic analysis of fiber-reinforced composites of hexagonal structure. *Journal of Multiscale Modelling*. 2016. Vol. 07. No. 03. P. 1650006-1–1650006-32 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Web of Science*).

32. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Percolation threshold for elastic problems: self-consistent approach and Padé approximants // *Advances in mechanics of microstructured media and structures* / eds. F. dell’Isola, V. Eremeyev, A. V. Porubov. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. Vol. 87. P. 35–42 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартиль Q3).

33. Kalamkarov A., Andrianov I., Starushenko G. Refinement of the Maxwell formula for fiber-reinforced composites. *Journal of Multiscale Modelling*. 2020. Vol. 11. No. 01. P. 1950001-1–1950001-33 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*).

34. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Kvitka S. A. Calculation of effective characteristics of a 2D composite with rhombic voids using an inhomogeneous cell model. *Symmetry*. 2023. Vol. 15. Is. 3. P. 646 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*).

35. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Koblik S. G., Starushenko G. A. Nonlinear oscillation of a microbeam due to an electric actuation – comparison of approximate models. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2024. Vol. 104. Is. 2. P. e202300091 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*).

36. Andrianov I. V., Koblik S. G., Starushenko G. A. Investigation of electrically actuated geometrically nonlinear clamped circular nanoplate. *Acta Mechanica*. 2024. Vol. 235. Is. 2. P. 1015–1026 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

37. Андрианов И. В., Старушенко Г. А. Эффективные изгибные характеристики пластин из композитных материалов // Прочность, жесткость, технологичность изделий из композиционных материалов : Труды III Всесоюзной конференции (г. Запорожье, 24-26 октября 1989 г.). Запорожье, 1989. С. 10.

38. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic methods in the theory of perforated media // *Proceedings of the 30th Polish Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1994)*. Zakopane, 1994. P. 39.

39. Andrianov I. V., Starushenko G. A. New analytical approaches in the theory of composite materials // *Annual Scientific Conference Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (Prague, May 27-31, 1996)*. Prague, 1996. P. 10.

40. Andrianov I. V., Danishevsky V. V., Starushenko G. A., Tokarzowski S. Asymptotic approach, multi-point Pade and quasifractional approximations in the theory of composite materials // *Book of Abstracts of the 3rd EUROMECH Solid Mechanics Conference (Stockholm, August 18-22, 1997)*. Stockholm, 1997. P. 27.

41. Andrianov I., Starushenko G., Danishevsky V. Asymptotic approximation of effective heat conductivity of composite materials with large diamond fibre inclusions // *Book of Abstracts of the X International Conference on Mechanics of Composite Materials*

(Riga, April 20-23, 1998). Riga, 1998. P. 19.

42. Старушенко Г. А., Крулик Н. А. Метод несимметричного пилообразного преобразования аргумента в теории композитных материалов // Наука і освіта '98 : матеріали Першої міжнародної конференції (м. Дніпропетровськ, 23-30 квітня 1998 р.). Дніпропетровськ, 1998. Т. 8. Фізико-математичні науки. Технічні науки. С. 326.

43. Starushenko G., Krulik N. About elasticity theory periodic task solutions representation by the special non-smooth variable transformation // Наука і освіта '98 : матеріали Першої міжнародної конференції (м. Дніпропетровськ, 23-30 квітня 1998 р.). Дніпропетровськ, 1998. Т. 10. Фізико-математичні науки. Технічні науки. С. 413.

44. Andrianov I., Starushenko G., Tokarzewski S. Asymptotic investigation of effective transport properties of composite materials // Volume of Abstracts of the 32nd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1998). Zakopane, 1998. P. 47-48.

45. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Employment of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method in the elasticity theory for flaky composites // Volume of Abstracts of the 32nd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1998). Zakopane, 1998. P. 351-352.

46. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Stieltjes integral representation for torsion moduli of bars reinforced with cylindrical fibres // Volume of Abstracts of the 32nd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1998). Zakopane, 1998. P. 71.

47. Tokarzewski S., Starushenko G., Andrianov I. Analytical continuation of effective transport coefficients expanded at zero and infinity // Abstracts of the International Conference on Rational Approximation (Antwerp, June 6-11, 1999). Antwerp, 1999. P. 11.

48. Andrianov I., Danishevskyy V., Tokarzewski S., Starushenko G. Pade approximants for effective properties of composite materials // Book of Abstracts of the 4th EUROMECH Solid Mechanics Conference (Metz, June 26-30, 2000). Metz, 2000. P. 242.

49. Tokarzewski S., Andrianov I., Starushenko G., Danishevskyy V. Analytical continuation of asymptotic expansions of effective transport properties // Abstracts of the Third World Congress of Nonlinear Analysts (Catania, July 19-26, 2000). Catania, 2000. P. 648.

50. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Description of periodic processes by special smooth-linear argument transformation // Volume of Abstracts of the 33rd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 1-5, 2000). Zakopane, 2000. P. 375-376.

51. Старушенко Г. А., Крулик Н. А. Анализ и взаимодействие асимптотических методов в периодических задачах теории композитов // Україна наукова '2001 : матеріали Першої Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 25-27 червня 2001 р.). Дніпропетровськ, 2001. Т. 3. Технічні та фізико-математичні науки. С. 10-11.

52. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Ларионов Г. И. Периодические решения плоской задачи теории слоистых композитов // Україна наукова '2001 : матеріали Першої Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 05-07 листопада 2001 р.). Дніпропетровськ, 2001. Т. 8. Технічні науки. С. 51-53.

53. Старушенко Г. А., Крулик Н. А. Дослідження згинання стрижня на дискретних лінійно-пружних опора // Україна наукова '2002 : матеріали Другої Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 10-24 травня

- 2002 р.). Дніпропетровськ, 2002. Т. 13. Фізико-математичні та технічні науки. С. 28–29.
54. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Investigation and analysis of a periodic problem for a layered composite structure on an elastic foundation by means of a no smooth argument transformation method // Book of Abstracts of the XII International Conference on Mechanics of Composite Materials (Riga, June 9-13, 2002). Riga, 2002. P. 195.
55. Старушенко Г. А. Неоднородная модель в задачах теплопроводности периодических неоднородных структур // Динаміка наукових досліджень : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 28 жовтня – 4 листопада 2002 р.). Дніпропетровськ, 2002. Т. 2. Архітектура. Механіка. С. 35–36.
56. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е., Андрианов И. В. Анализ трехфазной модели периодических задач теории упругости // Математичні проблеми технічної механіки : матеріали Третьої Всеукраїнської наукової конференції (м. Дніпродзержинськ, 20-23 квітня 2003 р.). Дніпродзержинськ, 2003. С. 134.
57. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Рогоза Б. Е. Асимптотический анализ периодических решений на основе специального негладкого преобразования аргумента // Україна наукова '2003 : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 16-20 червня 2003 р.). Дніпропетровськ, 2003. Т. 30. Технічні науки. Математика. С. 28–29.
58. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Рогоза Б. Е. Применение метода специального негладкого преобразования аргумента к исследованию слоистого композитного массива на комбинированном упругом основании // Динаміка наукових досліджень '2005 : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 20-30 червня 2005 р.). Дніпропетровськ, 2005. Т. 51. Технічні науки. С. 42–45.
59. Starushenko G., Rogoza B. At inhomogeneous model for effective transport properties of highly contrasting composite materials // Book of Abstracts of the XV International Conference on Mechanics of Composite Materials (Riga, May 26-30, 2008). Riga, 2008. P. 253–254.
60. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Габринец В. А., Бывалин Д. Н. Эффективный коэффициент теплопроводности композитного материала, пригодный для любых значений параметров // Прочность материалов и элементов конструкций : материалы Международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика НАН Украины Г. С. Писаренко (г. Киев, 28-30 сентября 2010 г.). Киев, 2010. Т. 1. С. 14–15.
61. Andrianov I., Markert B., Starushenko G. Linear and nonlinear waves in lattice structures: continualization and discrete effects // Book of Abstracts of the 8th European Nonlinear Oscillations Conference (Vienna, July 6-11, 2014). Vienna, 2014. Paper-ID 231. P. 114.
62. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S. Estimations of the effective heat conductivity of a composite with hexagonal lattice of perfectly conducting circular inclusions // Constructive Methods in the Theory of Composite and Porous Media : Abstracts at the 13th ISAAC Congress (Ghent, August 2-6, 2021). Ghent, 2021. P. 53.
63. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S. Homogenization of transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites: analytical solution of cell problem //

Mechanics of High-Contrast Elastic Composites : Abstracts at EUROMECH Colloquium 626 (Keele, September 6-8, 2021). Keele, 2021. P. 7.

64. Andrianov I., Awrejcewicz J., Starushenko G., Kvitka S. Thermal waves in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures // *Dynamical Systems – Theory and Applications : Abstracts at the 16th International Conference* (Lodz, December 6-9, 2021). Lodz, 2021. P. 491–492.

65. Старушенко Г. А. Нестационарний теплообмін в композитних мембранах // *Енергетичний менеджмент: стан та перспективи розвитку – REMS'2022 : матеріали Міжнародної науково-технічної та навчально-методичної конференції* (м. Київ, 15-17 листопада 2022 р.). Київ, 2022. С. 79–81.

66. Старушенко Г. А. Ефективна теплопровідність високопровідних щільно упакованих композитів // *Проблеми надійності та міцності машин і споруд : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції* (м. Харків, 11-12 травня 2023 р.). Харків, 2023. С. 52–55.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

67. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Application of the averaging method for the calculation of perforated plates. *Soviet Applied Mechanics*. 1988. Vol. 24. Is. 4. P. 410–415 (видання включено до міжнародних наукометричних баз Scopus і Web of Science).

68. Старушенко Г. А. Исследование изгиба пластины, ослабленной малыми отверстиями. *Динамика и прочность машин*. Харьков : Вища школа, 1988. Вып. 47. С. 34–40.

69. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Solution of dynamic problem for perforated structures by the method of averaging. *Journal of Soviet Mathematics*. 1991. Vol. 57. Is. 5. P. 3410–3412 (видання включено до міжнародної наукометричної бази Scopus).

70. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Application of the averaging method to the study of oscillations of a perforated plate. *Journal of Soviet Mathematics*. 1993. Vol. 65. Is. 2. P. 1503–1507 (видання включено до міжнародної наукометричної бази Scopus).

71. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic methods in the theory of perforated membrane of nonhomogeneous structure // *Proceedings of the 30th Polish Solid Mechanics Conference* (Zakopane, September 5-9, 1994). Warsaw : Engineering Transactions. 1995. Vol. 43. No. 1–2. P. 5–18.

72. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Homogenization procedure and Pade approximations in the theory of periodically nonhomogeneous media // *Proceedings of the International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering* (Warsaw, September 25-29, 1995). Warsaw, 1995. Vol. 1. P. 494–495.

73. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Infinite sequence of basic estimations for the effective moduli of composite materials // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 4th Ukrainian – Polish seminar* (Warsaw, July 8-15, 1996). Warsaw, 1996. No. 4. Vol. 2. P. 148–158.

74. Пилипчук В. Н., Старушенко Г. А. О представлении периодических решений дифференциальных уравнений посредством косоугольно-пилообразного преобразования аргумента. *Доповіді Національної академії наук України*. 1997. № 11. С. 25–28.

75. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. An analytical technique for

modeling of processes generated by a pulsed forcing // III Szkola Geomechaniki : Materialy Konferencyjne (Gliwice – Ustron, November 23-26, 1997). Gliwice, 1997. P. 155–161.

76. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Asymptotic expansion of the bulk conductivities of heterogeneous media // Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 5th Ukrainian – Polish seminar (Dnipropetrovsk, June 30 – July 7, 1997). Warsaw, 1997. No. 5. P. 426–439.

77. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Rigorous bounds on the asymptotic expansion of effective transport coefficients of two-phase media. *Archives of Mechanics*. 1997. Vol. 49. № 4. P. 647–663.

78. Андрианов И. В., Старушенко Г. А. Использование трехфазной модели для определения эффективных характеристик композитов с любыми периодическими кубическими включениями. *Доповіді Національної академії наук України*. 1997. № 1. С. 52–56.

79. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Галка А. Метод пилообразного преобразования аргумента в периодических задачах теории слоистых композитов // Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 6th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, July 6-11, 1998). Warsaw, 1998. No. 6. P. 551–556.

80. Tokarzewski S., Andrianov I., Starushenko G. Pade bounds for the effective coefficients of nonlinear temperature-dependent periodic composites // Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 6th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, July 6-11, 1998). Warsaw, 1998. No. 6. P. 349–356.

81. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Данишевский В. В. Асимптотическое представление эффективного коэффициента теплопроводности композитного материала с волокнистыми включениями ромбовидной формы большого размера. *Диференціальні рівняння та їх застосування*. Дніпропетровськ, 1998. С. 46–52.

82. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Данишевский В. В. Асимптотическое определение эффективного коэффициента теплопроводности свайного поля. *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 1999. № 1. С. 26–29.

83. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Токаржевский С. Описание и исследование периодических структур посредством техники негладкого преобразования аргумента // Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 7th Ukrainian – Polish seminar (Dnepropetrovsk, June 24-29, 1999). Warsaw, 1999. No. 7. P. 169–174.

84. Andrianov I., Starushenko G., Tokarzewski S. Torsion of a non-homogeneous bar with periodic parallelepiped inclusions: analytical expressions for effective shear modulus. *Technische Mechanik*. 1999. Vol. 19. No. 1. P. 5–12.

85. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. About representation of theory tasks periodic solutions on basis of non-smooth argument transformation. *Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Is. 4 (special issue: “ICER '99”). P. 115–120 (*видання включено до міжнародної наукометричної бази Web of Science*).

86. Andrianov I., Danishevskii V., Starushenko G., Tokarzewski S. Asymptotic representation for the effective heat conductivity of a composite material with fibrous diamond-shaped inclusions. *Mechanics of Solids*. 2000. Vol. 35. Is. 4. P. 73–82.

87. Старушенко Г., Крулик Н., Токаржевский С. Периодическая задача для слоистого композитного массива на дискретном упругом основании // Theoretical

Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 8th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, 26-30 June, 2000). Warsaw, 2000. No. 8. P. 534–539.

88. Старушенко Г., Крулик Н., Токаржевский С. Негладкое преобразование системы в случае медленно изменяющейся нагрузки при изгибе стержня на периодически расположенных опорах // Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 9th Ukrainian – Polish seminar (Dnepropetrovsk, 27 June – 01 July, 2001). Warsaw, 2001. No. 9. P. 169–174.

89. Старушенко Г., Крулик Н., Токаржевский С. Исследование и анализ периодической задачи для слоистой композитной структуры на упругом основании с помощью метода негладкого преобразования аргумента // Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 10th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, June, 2002). Warsaw, 2002. No. 10. Vol. II. P. 803–808.

90. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Investigation of rod bending on discrete linear elastic props // Proceedings of the International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering (Warsaw, June 24-28, 2002). Warsaw, 2002. Vol. 8. P. 348–351.

91. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е., Андрианов И. В. Анализ трехфазной модели периодических задач теории упругости. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2003. Вип. 4. № 27. С. 99–103.

92. Starushenko G., Krulik N., Rogoza B., Tokarzewski S. Description of periodic processes by special smooth-linear argument transformation // Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 11th Ukrainian – Polish seminar (Dnepropetrovsk, June 23-27, 2003). Warsaw, 2003. No. 11. P. 241–248.

93. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Investigation and analysis of periodic problem for layered composite structure on periodic foundation by means of non-smooth argument transformation method // Proceedings of the Second International Conference of Engineering Rheology ICER 2003 (Zielona Góra, August 24-27, 2003). *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2003. Is. 8 (spec). P. 169–177.

94. Starushenko G., Krulik N., Rogoza B. Bending of a bar on a discrete elastic foundation. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2005. Вип. 3. № 38. С. 150–162.

95. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е. Обзор и анализ применения трехфазной модели в механике композитов. Ч. I. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2007. Вип. 5. № 52. С. 3–10.

96. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е. Обзор и анализ применения трехфазной модели в механике композитов. Ч. II. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 1. № 54. С. 3–12.

97. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Бывалин Д. Н. Численное исследование применимости уточненных моделей сплошной среды для описания пространственно-одномерных линейных волновых процессов. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 12. С. 3–11.

98. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е. Применение асимптотических приближений теории смазки к исследованию композитных структур. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 9. С. 3–16.

99. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic analysis of strongly anisotropic solids. *Technische Mechanik*. 2008. Vol. 28. No. 2. P. 121–125.

100. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Бывалин Д. Н. Двухфазная модель композита с цилиндрическими включениями малого размера. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 20–43.

101. Andrianov I., Starushenko G., Awrejcewicz J. Numerical investigation of nonlocal theory of elasticity models for 1D linear wave processes // *Dynamical Systems – Theory and Application // Proceedings of the 10th Conference on Dynamical Systems (Lodz, December 7-10, 2009)*. Lodz, 2009. No. 1. P. 123–126.

102. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Бывалин Д. Н. Анализ двухфазной модели композита с цилиндрическими включениями малого размера. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 44–55.

103. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Габринец В. А., Бывалин Д. Н. Эффективный коэффициент теплопроводности композитного материала, пригодный для любых значений параметров // *Прочность материалов и элементов конструкций : Труды Международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика НАН Украины Г. С. Писаренко (г. Киев, 28-30 сентября 2010 г.)*. Киев : ИПП НАН Украины, 2011. С. 162–169.

104. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Markert B., Starushenko G. A. On the vibrations of a composite structure with hexagonal structure of a circular inclusions // *Dynamical systems – Mechatronics and Life Sciences / eds. J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, J. Mrozowski, P. Olejnik*. Łódź : Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics, 2015. P. 11–22.

АНОТАЦІЯ

Старушенко Г. А. Асимптотичні методи та моделі в механіці композитних матеріалів. – Кваліфікаційна наукова праця за сукупністю статей.

Наукова доповідь за сукупністю статей, опублікованих у журналах, віднесених до першого та другого квантилів (Q1 та Q2), на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 – будівельна механіка (19 – архітектура та будівництво). – Придніпровська державна академія будівництва та архітектури Міністерства освіти і науки України, Дніпро, 2024.

Побудовані й обґрунтовані на фізичному рівні асимптотичні моделі для аналізу макроскопічних властивостей композитних матеріалів різної структури, розроблено строгий математичний апарат їх опису, знайдені аналітичні розв'язки задач в області граничних значень фізичних і геометричних параметрів композитів. Надана асимптотична і чисельна оцінка точності й області застосовності побудованих моделей, проведено якісний та кількісний аналіз достовірності результатів.

Представлено фізичну інтерпретацію, математичний опис та класифікацію моделей двофазних волокнистих композитів за умовами контакту «матриця – включення». Проаналізовано поняття фізичної еквівалентності композитних структур.

Досліджено моделі континуальної апроксимації дискретних систем. Доведено наявність хаосу в неперервній моделі.

Ключові слова: асимптотична модель, асимптотичний метод, композит, теплопровідність, ефективний коефіцієнт, апроксимація Паде, інтерфейс, формула Максвелла, континуальна апроксимація.

SUMMARY

Starushenko G. A. Asymptotic Methods and Models in the Mechanics of Composite Materials. – Qualifying scientific work on a set of articles.

Scientific work on the set of articles published in journals classified in the first and second quartiles (Q1 and Q2) for the scientific degree of a doctor of technical sciences in specialty 05.23.17 – Structural Mechanics (19 – Architecture and Construction). – Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, 2024.

The research is devoted to the construction of asymptotic models and the development of mathematical methods that make it possible to correctly describe composites of various structures and the physical processes occurring in them, including in the regions of limiting values of their physical and geometric parameters.

The following asymptotic models are constructed, mathematically described and physically substantiated in the scientific work: three-phase models of fibrous composites with circular and square inclusions; improved three-phase model; models of lubrication approach; model of two dimensional composite hexagonal structures; models of two-phase fibrous composites for inclusions of various shapes and “inclusion – matrix” contact conditions; models of composites with a thin interlayer at the phase boundary; two-phase models of composites; continuum models of a 1D discrete medium; continuum model with chaotic behaviour.

The areas of applicability of the obtained asymptotic models are determined, asymptotic and numeric estimates of their accuracy are given, and a qualitative and quantitative analysis of the reliability of the results is carried out.

The mathematical methods to describe of asymptotic models are used: asymptotic homogenization method; two-scale method; boundary shape perturbation method; Padé approximants method; two- and three-point Padé interpolation method; alternating Schwarz method; asymptotically equivalent functions method; matching asymptotic expansions method; series solution method; non-symmetrical saw-tooth argument transformation method; numerical method.

The problems of determining the effective thermal conductivity of a composite material with periodic cylindrical inclusions of a circular and square cross-section are analysed. Defining mathematical relationships are derived on the basis of a three-phase composite model. The analytical expressions for the effective coefficients are obtained in the zero-order approximation and the corrections in the first-order approximation by the boundary shape perturbation method. This correction allows taking into account the geometry of inclusions, not just their volume fraction.

The possibilities of generalizing the three-phase composite model are discussed. The obtained solution with Padé approximants fundamentally expands the applicability limits of the model: provide an acceptable results for the inclusions of any conductivity and with the size up to $a = 0,996$ inclusive. A modified three-phase composite model gives reliable results in the whole area of change of both composite parameters – geometric and physical.

Solutions for densely packed, high-contrast fibre composites with different structure and shape of inclusions are obtained based on the lubrication approach.

The solution of the problem of natural vibrations of a rectangular membrane rigidly clamped along the contour, which is a composite structure with periodically arranged in a hexagonal lattice of circular inclusions, is obtained.

The apparatus of asymptotically equivalent functions is used to study the limit states of composite structures.

Composite material with periodically distributed cylindrical inclusions of square cross-section is investigated, and analytical interpolation formula of asymptotic expansions for the effective thermal conductivity is obtained.

Employing the non-smooth argument substitution for description of local and discretely varying properties of the inhomogeneous structures and using the method of asymptotically equivalent functions, models are constructed, and asymptotic representations are obtained for fibrous composites of various structures. Different conditions of “matrix – inclusion” contact in composite structures are investigated and mathematically described.

Asymptotic approximations in models of two-phase fiber composites are analysed; the concept of physical equivalence of composite structures is defined and relations for their effective parameters are given. The asymptotic expressions of the effective parameters of composites of different structures are classified – when the contact conditions at the interface of the composite phases change.

Higher approximations of the Maxwell formula are constructed based on the two-phase composite model and alternating Schwarz method. Generalizing relations for the Maxwell formula in the case of circular inclusions are constructed using the Schwarz – Padé expansion.

Questions of higher order asymptotic homogenization for dynamic problems are investigated. Systems with continuous and piecewise continuous parameters, discrete systems, and also continuous systems with discrete elements are considered.

The solution of the periodic problem of the theory of elasticity for two-phase layered composite massif problem is obtained by application of the technique of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method. The non-smooth temporal transformation is applied to construct a periodic solutions of a weakly non-linear system under the parametric impulsive excitation. The transformation eliminates singular terms and reduces the equation of motion to a standard boundary value problem.

The various continuum models of a 1D discrete media are considered: classical, intermediate, quasi-continuum, and improved quasi-continuum models. The impact of symmetry change of asymptotic wave behaviour during the transition from discrete to continuous media is analysed for the Lagrange lattice.

Continualization procedure for Verhulst-like ordinary differential equations based on Padé approximants is considered. The presence of chaos in a continuous system is proven correctly by calculation the Lyapunov exponents and the Lyapunov dimensions.

Key words: asymptotic model, asymptotic method, composite, thermal conductivity, effective coefficient, Padé approximation, interface, Maxwell formula, continuous approximation.