


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
ПРИДНІПРОВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ  
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Кваліфікаційна наукова  
праця за сукупністю статей



підпис

**СТАРУШЕНКО ГАЛИНА АРКАДІЇВНА**

УДК 624.016:539.3

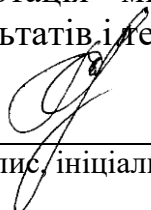
**НАУКОВА ДОПОВІДЬ**  
за сукупністю статей, опублікованих у журналах,  
віднесених до першого та другого квіртилів (Q1 та Q2)

**АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ  
В МЕХАНІЦІ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ**

05.23.17 – будівельна механіка  
19 – архітектура та будівництво

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



**Г. А. Старушенко**  
(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Дніпро – 2023

## АНОТАЦІЯ

*Старушенко Г. А.* Асимптотичні методи та моделі в механіці композитних матеріалів. – Кваліфікаційна наукова праця за сукупністю статей.

Наукова доповідь за сукупністю статей, опублікованих у журналах, віднесених до першого та другого кuartилів (Q1 та Q2), на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.23.17 «Будівельна механіка» (19 – Архітектура та будівництво). – НТУ «Дніпровська політехніка», Придніпровська державна академія будівництва та архітектури Міністерства освіти і науки України, Дніпро, 2023.

У сучасний час композитні матеріали та конструкції знаходять широке застосування практично у всіх галузях техніки, і при цьому спостерігається тенденція випереджального темпу зростання потреб композитів та нових технологій їх отримання порівняно з розвитком експериментальних і теоретичних методів дослідження таких структур.

Розвиток теоретичної основи для вивчення механічної поведінки неоднорідних середовищ базується, як правило, на використанні ідеалізованих геометричних моделей композитних структур, що дозволяють отримати аналітичні оцінки макроскопічних властивостей композитів через геометричні та фізичні характеристики їх фаз. Застосування ідеалізованих моделей дозволяє об'єднати, описати з єдиної точки зору та знайти взаємозв'язки між багатьма результатами, отриманими для різних задач механіки композитів, тобто створити теоретичну основу для обґрунтованого якісного та кількісного аналізу фізичного стану гетерогенних середовищ.

Значна структурна відмінність композитних матеріалів як з точки зору їх фізичних властивостей, так і за геометричною структурою, найширший спектр практичного застосування, особливості виробничих технологій визначають різноманіття й складність наукових проблем механіки композитів, які вимагають побудови відповідних асимптотичних моделей та застосування адекватних методів розв'язку.

Дослідження присвячене побудові асимптотичних моделей та розробці

математичних методів, що дозволяють коректно описувати композити різної структури та фізичні процеси, які в них відбуваються, обчислювати ефективні характеристики композитних матеріалів в області граничних значень їх фізичних та геометричних параметрів.

У науковій роботі побудовано, математично описано та фізично обґрунтовано такі асимптотичні моделі:

- трифазні моделі волокнистих композитів з круглими та квадратними включеннями;
- модифіковану трифазну модель композита з циліндричними включеннями;
- моделі теорії змазки;
- модель двовимірних композитів гексагональної структури;
- моделі двофазних волокнистих композитів для включень різної форми та умов контакту «включення – матриця»;
- моделі композитів із тонким інтерфейсом на межі розділу фаз;
- двофазні моделі композитів з круглими та квадратними включеннями для побудови узагальнених співвідношень формули Максвелла;
- континуальні моделі одновимірного дискретного середовища;
- континуальну модель з хаотичною поведінкою.

Визначено області застосування побудованих асимптотичних моделей, надано асимптотичну та чисельну оцінку їх точності, проведено якісний і кількісний аналіз достовірності отриманих результатів.

Для опису асимптотичних моделей використовувалися математичні методи:

- теорії осереднення;
- двохмасштабних розкладень;
- збурення форми межі;
- апроксимацій Паде;
- двох- і триточкових інтерполяцій Паде;

- теорії змазки (асимптотики тонкого шару);
- послідовних наближень (альтернуючий метод) Шварца;
- асимптотичної гомогенізації;
- асимптотично еквівалентних функцій;
- зрощування асимптотичних розкладень;
- перетворення Лапласа;
- теорії функцій комплексної змінної;
- знаходження розв'язку в рядах;
- несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу ( $\tau$ -перетворення);
- чисельні методи.

У розділі 1 розглядаються задачі визначення ефективної теплопровідності композитного матеріалу з періодичними циліндричними включеннями круглого та квадратного поперечного перерізу, розташованими квадратною сіткою. Визначальні математичні співвідношення отримані на основі трифазної моделі композиту, теорії асимптотичної гомогенізації та методу збурення форми межі для розв'язку задачі на елементарній комірці. Для ефективних коефіцієнтів теплопровідності знайдені аналітичні вирази нульового порядку апроксимації та першої поправки до них, що дозволяє враховувати геометрію включень, а не лише їх об'ємну частку. Проведено асимптотичний аналіз розв'язків; обчислення за ними порівняні з відомими в деяких окремих випадках результатами; оцінені межі застосування розроблених моделей.

У розділі 2 досліджуються можливості узагальнення трифазної моделі композиту:

- з використанням апроксимацій Паде;
- побудовою модифікованої трифазної моделі композиту.

Отриманий з використанням апроксимацій Паде розв'язок значно розширює межі застосування трифазної моделі композиту: дає якісну картину асимптотики та кількісні оцінки високої точності ефективного коефіцієнта теплопровідності для композитів з включеннями великих розмірів, близьких до

граничного. В абсолютному вираженні розв'язок Паде дає практично прийнятні результати для композитів з включеннями будь-якої провідності, включаючи граничний випадок абсолютної провідності, для розмірів включень до  $a = 0,996$  включно.

Розроблено модифіковану трифазну модель композиту, яка дозволяє отримати достовірні значення ефективного параметра практично у всьому діапазоні зміни обох параметрів композиту: геометричного – розміру включень  $0 < a < 1$  та фізичного – провідності включень  $0 < \lambda < \infty$ , включаючи граничні випадки  $a \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 1$  та  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Розділ 3 присвячений застосуванню теорії змазки, на основі якої отримані розв'язки для щільно упакованих висококонтрастних волокнистих композитів з різною структурою та формою включень. Побудовано моделі композитів з круглими, квадратними та криволінійними ромбічними включеннями, досліджено асимптотичні властивості їх ефективної провідності.

Проведено узагальнення підходу теорії змазки для композитів з гексагональним масивом круглих включень. Отримано асимптотичний вираз ефективного параметра для випадку їх ідеальної провідності. З використанням техніки Паде-апроксимацій для ефективного параметра абсолютно провідних включень визначені верхня і нижня оцінки з більш вузькою «вилкою», ніж межі Хашина – Штрікмана, при будь-яких значеннях розміру включень.

Отримано розв'язок задачі про власні коливання жорстко защемленої по контуру прямокутної мембрани, що являє собою композитну структуру з періодично розташованими круглими включеннями, які становлять гексагональну решітку.

Досліджено нестационарний теплообмін у композитній мембрані з круглими включеннями гексагональної структури. Використовується перетворення Лапласа та метод асимптотичної гомогенізації. Отримано осереднені співвідношення та знайдено асимптотичний розв'язок локальної задачі для щільно упакованих висококонтрастних композитів. Розглянуто випадок охолодження прямокутної композитної області за законом охолодження

Ньютона.

У 4-му розділі для вивчення граничних станів композитних структур використовується апарат асимптотично еквівалентних функцій.

Для композита з періодично розташованими циліндричними включеннями квадратного профілю шляхом зрощування асимптотичних представлень побудовано єдиний аналітичний вираз приведенного параметра теплопровідності. Отримано асимптотичні розкладення знайденого співвідношення в граничних випадках розмірів включень та їх провідності.

З використанням методу негладкого перетворення аргументу для опису локальних та дискретно змінюваних властивостей неоднорідних структур і методу асимптотично еквівалентних функцій побудовано моделі й отримано асимптотичні представлення ефективних параметрів для волокнистих композитів різної структури: з включеннями великого розміру та провідності, розташованими квадратною сіткою; з непровідними включеннями; з гексагональним масивом круглих включень ідеальної провідності та непровідних; з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз.

Розділ 5 присвячений аналізу умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

Розглянуто моделі двофазних волокнистих композитів з точки зору структурних особливостей на межі розділу їх фаз. Математично описано різні умови контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

Проаналізовано асимптотичні наближення в моделях двофазних волокнистих композитів: поняття «матриця» і «включення»; «абсолютно провідні» і «непровідні» включення. Визначено поняття фізичної еквівалентності композитних структур та наведено співвідношення для ефективних параметрів фізично еквівалентних композитних структур.

Класифіковано асимптотичні представлення ефективних параметрів композитів різної структури – за зміни умов контакту на межі розділу фаз композиту. Показано, що для представлених моделей композитів виконується співвідношення формули Діхне для «додаткових систем».

В розділі 6 розглядається задача побудови вищих наближень формули Максвелла. Розроблено двофазну модель композиту та на її основі проведено асимптотичний аналіз залежностей, отриманих альтернуючим методом Шварца. Знайдено аналітичні вирази, що уточнюють формулу Максвелла для композитів, армованих волокнами квадратного та круглого профілів. Показано, що головний член уточнених співвідношень співпадає з класичною формулою Максвелла.

Узагальнені співвідношення формули Максвелла для круглих включень побудовано за допомогою розкладення Шварца – Паде. Розв’язок придатний для висококонтрастних фаз композиту з об’ємною часткою включень, дуже близькою до фізично можливого максимального значення. Результати дослідження підтверджуються порівнянням з відомими чисельними та асимптотичними даними інших авторів.

Досліджуються питання асимптотичної гомогенізації вищого порядку для динамічних задач. Розглядаються системи з неперервними та кусково-неперервними параметрами, дискретні системи, неперервні системи з дискретними елементами. Аналізуються низькочастотні та високочастотні коливання. Для низькочастотних коливань побудовано декілька наближень методом асимптотичної гомогенізації. Досліджено вплив граничних умов і параметрів системи. Точність отриманої апроксимації оцінюється чисельним моделюванням.

У розділі 7 розглядається застосування методу несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу до розв’язку задач механіки для періодичних структур.

Представлені основні математичні співвідношення для пилкоподібної кусково-лінійної функції  $\tau(x)$ . Проілюстровано застосування методу  $\tau$ -перетворення до розв’язку періодичної задачі теорії пружності на прикладі задачі для двофазного шаруватого композитного масиву.

Негладке перетворення аргументу за часом застосовано для побудови сімейства періодичних розв’язків слабо нелінійної системи при параметричному імпульсному збудженні. Перетворення усуває сингулярні члени та зводить

рівняння руху до стандартної слабо нелінійної крайової задачі. Для розв'язку цієї задачі використовуються асимптотичні розкладення, що дає можливість отримати аналітичний розв'язок в елементарних функціях.

У розділі 8 досліджуються моделі неперервної апроксимації дискретних систем.

Розглядаються різні континуальні моделі одновимірних дискретних середовищ: класична, проміжна, квазіконтинуальна та покращена квазіконтинуальна моделі. Проведено аналіз різних способів континуалізації в лінійному випадку.

Досліджується вплив зміни симетрії на асимптотичну поведінку хвиль при переході від дискретних до неперервних середовищ. Пропонуються різні неперервні наближення для апроксимації решітки Лагранжа. Аналізуються апроксимації фазової та групової швидкостей.

Показано використання апарату двохточкових апроксимацій Паде для побудови неперервних апроксимацій решітки Лагранжа, які добре апроксимують дискретну функцію Гріна й дають можливість коректно описати основні особливості розв'язку дискретних задач неперервними функціями.

Проаналізовано поняття зосередженої сили в теорії пружності й запропоновано регуляризацію розв'язку шляхом зміни поняття зосередженої сили: заміни дельта-функції Дірака інтерполяційною функцією Уїттакера – Шеннона – Котельникова. Розглянуто аналог задачі Фламана та показано, що знайдений розв'язок наближається до класичного при наближенні параметра мікронеоднорідності до нуля.

Вивчаються різні варіанти звичайних диференціальних рівнянь типу Ферхюльста та звичайних різницевих рівнянь. Процедура континуалізації заснована на апроксимації Паде. Наявність хаосу в неперервній системі коректно доведено розрахунком таких характерних параметрів хаотичних динамічних систем як показники Ляпунова та розмірності Ляпунова.

У висновках коротко узагальнено отримані результати роботи, визначено місце асимптотичних методів та моделей серед інших напрямів досліджень



механіки композитів у світлі сучасного тренду застосування в будівельній механіці інноваційних виробничих технологій, створення новітніх композитних матеріалів – і, як наслідок, появи нових наукових проблем, дослідження яких потребує глибокого осмислення на фізичному рівні, фундаментального теоретичного обґрунтування та строгого математичного розв'язку.

**Ключові слова:** асимптотична модель, асимптотичний метод, композит, теплопровідність, ефективний коефіцієнт, апроксимація Паде, інтерфейс, формула Максвелла, континуальна апроксимація.

## SUMMARY

*Starushenko G. A. Asymptotic Methods and Models in the Mechanics of Composite Materials. – Qualifying scientific work on a set of articles.*

Scientific work on the set of articles published in journals classified in the first and second quartiles (Q1 and Q2) for the scientific degree of a doctor of technical sciences in specialty 05.23.17 “Structural mechanics”. – Dnipro University of Technology, Prydniprov's'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, 2023.

Currently, composite materials and structures are widely used in almost all areas of technology: aircraft and rocket manufacturing, construction, instrumentation, in the production of household appliances, in medicine, sports, etc. Moreover, there is a tendency to outpace the growth rate of demand for composites and new technologies for their production in comparison with the development of experimental and theoretical methods for studying such structures.

The development of a theoretical basis for studying the mechanical behaviour of inhomogeneous media is based, as a rule, on the use of idealized geometric models of composite structures, which yield analytical estimates of the macroscopic properties of composites through the geometric and physical characteristics of their constituent phases. The use of idealized models makes it possible to describe from a single point of view and find relationships between many results obtained for various problems of

composite mechanics. In other words, to create a theoretical basis for a reasonable qualitative and quantitative analysis of the physical state of heterogeneous media.

A significant structural difference of composite materials, both in terms of their physical properties and geometric structure, and the widest range of their practical application, features of production technologies determine the diversity and complexity of scientific problems, arising in the mechanics of composites. The study of these problems requires the construction of appropriate asymptotic models and the application of adequate solution methods.

The research is devoted to the construction of asymptotic models and the development of mathematical methods that make it possible to correctly describe composites of various structures and the physical processes occurring in them. In particular, analytical expressions are obtained for the effective characteristics of composite materials in the regions of limiting values of their physical and geometric parameters.

The following asymptotic models are constructed, mathematically described and physically substantiated in the scientific work:

- three-phase models of fibrous composites with circular and square inclusions;
- improved three-phase model with cylindrical inclusions;
- models of lubrication approach;
- model of two dimensional composite hexagonal structures;
- models of two-phase fibrous composites for inclusions of various shapes and “inclusion-matrix” contact conditions;
- models of composites with a thin interlayer at the phase boundary;
- two-phase models of composites with circle and square inclusions for constructing generalizing relations of the Maxwell formula;
- continuum models of a 1D discrete medium;
- continuum model with chaotic behaviour.

The areas of applicability of the obtained asymptotic models are determined, asymptotic and numeric estimates of their accuracy are given, and a qualitative and

quantitative analysis of the reliability of the results is carried out.

The mathematical methods to describe of asymptotic models are used:

- homogenization theory;
- two-scale method;
- boundary shape perturbation method;
- Padé approximants method;
- two- and three-point Padé interpolation method;
- lubrication approach (asymptotics of thin layer);
- alternating Schwarz method;
- asymptotic homogenization method;
- asymptotically equivalent functions method;
- matching asymptotic expansions method;
- Laplace transform;
- theory of functions of a complex variable;
- series solution method;
- non-symmetrical saw-tooth argument transformation method  
( $\tau$ -transformation);
- numerical method.

In Chapter 1, the problems of determining the effective thermal conductivity of a composite material with periodic cylindrical inclusions of a circular and square cross-section arranged in a square grid are analysed. Defining mathematical relationships are derived based on a three-phase composite model, asymptotic homogenization technique and application of the boundary shape perturbation method to solve the derived unit cell problems. The analytical expressions for the effective coefficients of thermal conductivity are obtained in the zero-order approximation and the corrections to this expression are derived in the first-order approximation. This correction allows taking into account the geometry of inclusions, not just its volume fraction. The obtained solutions are analysed and compared with known results in some particular cases, and the limits of its applicability are evaluated.

Chapter 2 discusses the possibilities of generalizing the three-phase model:

- based on the using Padé approximants;
- construction of an improved three-phase composite model.

The obtained solution with Padé approximants fundamentally expands the applicability limits of the three-phase composite model solution: provide a qualitative picture of the asymptotic behaviour as well as the quantitative estimates of high accuracy of the effective coefficient of thermal conductivity for composites with the inclusion of large size approaching a limiting value. In absolute terms, the derived solution with Padé provide practically acceptable results for the effective coefficient of thermal conductivity of composites with inclusions of any conductivity, including the absolutely conducting, and with the size of inclusions up to  $a = 0,996$  inclusive.

A modified three-phase composite model yielding correct effective parameter of composite structure has been proposed. A modified three-phase composite model gives practically reliable results in the whole area of both composite parameters: geometric parameter regarding the size of inclusions  $0 < a < 1$  and physical parameter regarding the inclusion conductivity  $0 < \lambda < \infty$ , including the limiting cases  $a \rightarrow 0, a \rightarrow 1$  and  $\lambda \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$ .

Chapter 3 is devoted to the application of the lubrication approach, based on which solutions for densely packed, high-contrast fibre composites with different structure and shape of inclusions are obtained. Models of composites with circular, square and curvilinear rhombic inclusions are constructed, asymptotic effective conductivity properties of composites are investigated.

The effective heat conductivity of a composite with hexagonal lattice of perfectly conducting circular inclusions is analysed. Application of Padé approximants yielded the effective heat conductivity parameter for large, close to the limit possible size inclusions. An important feature of the proposed solution is the fact that it correctly describes the asymptotics of the effective conductivity at  $\lambda \rightarrow \infty$  and  $a \rightarrow 1$ . Solutions based on the lubrication approach and Padé approximants give the upper and lower bounds for the asymptotics of the effective parameter in the case of absolutely conducting inclusions, and the distance between upper and lower bounds is small for

any values of the size of the inclusions.

The solution of the problem of natural vibrations of a rectangular membrane rigidly clamped along the contour, which is a composite structure with periodically arranged in a hexagonal lattice of circular inclusions, is obtained.

Unsteady heat conduction in fibre composite materials is studied. Laplace transform and asymptotic homogenization method are used. A closed-form expression for effective heat conductivity is reported. The case of cooling a rectangular composite domain on Newton's law of cooling is investigated.

In the 4th Chapter, to study the limit states of composite structures, the apparatus of asymptotically equivalent functions is used.

Composite material with periodically distributed cylindrical inclusions of square cross-section is investigated, and analytical interpolation formula of asymptotic expansions for the effective thermal conductivity is obtained. Asymptotic expansions of the resulting relation in the limiting cases of size of inclusions and their thermal conductivity are received.

Employing the non-smooth argument substitution for description of local and discretely varying properties of the inhomogeneous structures and using the method of asymptotically equivalent functions, models are constructed, and asymptotic representations are obtained for fibrous composites of various structures: with inclusions of large size and conductivity, located in a square lattice; with non-conducting inclusions; with a hexagonal array of circular inclusions; with thin interface at boundaries between different phases.

Chapter 5 is devoted to the analysis of the "matrix – inclusion" contact conditions in composite structures.

Models of two-phase fiber composites are considered from the point of view of structural features at the interface between their phases. Mathematically different conditions of "matrix – inclusion" contact in composite structures are described.

Asymptotic approximations in models of two-phase fiber composites are analysed: the concepts of "matrix" and "inclusion"; "absolutely conductive" and "non-conductive" inclusions. The concepts of physical equivalence of composite structures

are defined and relations for the effective parameters of physically equivalent composite structures are given.

The asymptotic expressions of the effective parameters of composites of different structures are classified – when the contact conditions at the interface of the composite phases change. It is shown that for the presented models of composites, the relation of the Dykhne formula for “additional systems” is satisfied.

Chapter 6 considers the problem of constructing higher approximations of the Maxwell formula.

A two-phase model of the composite was developed and, on its basis, an asymptotic analysis of the dependences obtained by the alternative Schwartz method was carried out.

Analytical expressions are obtained that refine the Maxwell formula for composite materials reinforced with fibres of square and round cross-section. It is shown that the principal term of the refined formula coincides with the classical Maxwell formula.

Generalizing relations for the Maxwell formula in the case of circular inclusions are constructed using the Schwarz – Padé expansion. The solution can be used even for a volume fraction of inclusions very near the physically possible maximum value, as well as for high-contrast composite phases. The results of the investigation are confirmed by comparison with known numerical and asymptotic data of other authors.

Questions of higher order asymptotic homogenization for dynamic problems are investigated. Systems with continuous and piecewise continuous parameters, discrete systems, and also continuous systems with discrete elements are considered. Low-frequency and high-frequency vibrations are analysed. For low-frequency vibrations, several approximations of the asymptotic homogenization method are constructed. The influence of the boundary conditions and the system parameters is investigated. The accuracy of the resulting approximation is assessed in numerical simulations.

Chapter 7 considers the application of the technique of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method to solving the problems of periodic structure mechanics.

The main mathematical relations for saw-tooth piecewise-linear function are presented. Application of the technique  $\tau$ -transformation to the solution of the periodic problem of the theory of elasticity is illustrated on the example of two-phase layered composite massif problem.

The non-smooth temporal transformation has been applied to construct a family of periodic solutions of a weakly non-linear system under the parametric impulsive excitation. The transformation eliminates singular terms and reduces the equation of motion to a standard weakly non-linear boundary value problem. To solve this problem, asymptotic expansions were applied. As a result, explicit form analytical solutions in terms of elementary functions.

Section 8 examines models of continuous approximation of discrete systems.

The various continuum models of a 1D discrete media are considered: classical, intermediate, quasi-continuum, and improved quasi-continuum models. The analysis of various receptions of continualization in a linear case is carried out.

The impact of symmetry change of asymptotic wave behaviour during the transition from discrete to continuous media is analysed. Various continuous approximations are proposed to approximate the Lagrange lattice. The approximations of phase and group velocities are analysed.

The problem of approximating the Green's function of the Lagrange chain by continuous analogs is considered. It is shown that the use of continuous equations based on the two-point Padé approximants gives good results.

The problem of singularities arising in the classical theory of elasticity with affecting concentrated loadings is analysed. To overcome this problem, instead of a transition to the gradient theory of elasticity, it is proposed to change the concept of concentrated effort. Namely, the Dirac delta function is replaced by the Whittaker – Shannon – Kotel'nikov interpolating function. An analog of the Flamant problem is considered as an example. The found solution does not contain singularities and tends to the classical one when the microheterogeneity parameter approaches zero.

Various variants of Verhulst-like ordinary differential equations and ordinary difference equations are studied. Continualization procedure is based on Padé approximants. The presence of chaos in a continuous system is proven correctly by

calculation of such characteristic parameters of chaotic dynamical systems as the Lyapunov exponents and the Lyapunov dimensions.

In the conclusions, the obtained results are briefly summarized, the place of asymptotic methods and models is determined among the other directions of research in the mechanics of composites in the light of the modern trend of applying innovative production technologies in construction mechanics and the creation of the latest composite materials. In addition, as a result, new scientific problems appear, the study of which requires a deep understanding at the physical level, a fundamental theoretical justification and a rigorous mathematical solution.

**Key words:** asymptotic model, asymptotic method, composite, thermal conductivity, effective coefficient, Padé approximation, interface, Maxwell formula, continuous approximation.



**СПИСОК НАУКОВИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ НАУКОВОЇ ДОПОВІДІ,  
ОПУБЛІКОВАНИХ У ЖУРНАЛАХ, ВІДНЕСЕНИХ  
ДО ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО КВАРТИЛІВ (Q1 ТА Q2)**

1. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Danishevs'kyi V. V., Tokarzewski S. Homogenization procedure and Padé approximants for effective heat conductivity of composite materials with cylindrical inclusions having square cross-section. *The Royal Society Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1999. Vol. 455. Is. 1989. P. 3401–3413.
2. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. Study of a non-linear oscillator under parametric impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 222. Is. 2. P. 307–328.
3. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Employment of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method in the elasticity theory for layered composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. Vol. 45. Is. 14. P. 3055–3060.
4. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Weicher D. Numerical investigation of 1D continuum dynamical models of discrete chain. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 92. Is. 11–12. P. 945–954.
5. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Three-phase model for a fiber-reinforced composite material. *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 95–104.
6. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Application of an improved three-phase model to calculate effective characteristics for a composite with cylindrical inclusions. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. No. 1. P. 197–222.
7. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Analytical expressions for effective thermal conductivity of composite materials with inclusions of square cross-section. *Composites: Part B*. 2013. Vol. 50. P. 44–53.
8. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model

for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part I: Application of the boundary shape perturbation method. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 154–177.

9. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part II: Application of Padé approximants. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 178–191.

10. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic analysis of the Maxwell Garnett formula using the two-phase composite model. *International Journal of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 7. No. 02. P. 1550025-1–1550025-27.

11. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Markert B., Starushenko G. A. Analytical homogenization for dynamic analysis of composite membranes with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017. Vol. 17. Is. 5. P. 1740015-1–1740015-14.

12. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models and transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part I: Square lattice of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 179. P. 617–627.

13. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models for transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part II: Square lattices of rhombic inclusions and hexagonal lattices of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 180. P. 351–359.

14. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S., Khajiyeva L. The Verhulst-like equations: integrable OΔE and ODE with chaotic behavior. *Symmetry*. 2019. Vol. 11. Is. 12. P. 1446.

15. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part I: using the Schwarz alternating method. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 4971–4990.

16. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A.

Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part II: using Padé approximants. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 5145–5157.

17. Andrianov I., Koblik S., Starushenko G. Transition from discrete to continuous media: the impact of symmetry changes on asymptotic behavior of waves. *Symmetry*. 2021. Vol. 13. Is. 6. P. 1008.

18. Andrianov I. I., Andrianov I. V., Starushenko G. A., Borodin E. I. Higher order asymptotic homogenization for dynamical problems. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 27. Is. 9. P. 1672–1687.

19. Andrianov I. V., Koblik S. G., Starushenko G. A., Kudaibergenov A. K. On aspects of gradient elasticity: Green's functions and concentrated forces. *Symmetry*. 2022. Vol. 14. Is. 2. P. 188.

20. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Non-stationary heat transfer in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. Is. 4. P. 1339–1350.

21. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Kvitka S. A. Effective heat conductivity of a composite with hexagonal lattice of perfectly conducting circular inclusions: An analytical solution. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 102. Is. 11. P. e202200216.

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	24
РОЗДІЛ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИФАЗНОЇ МОДЕЛІ КОМПОЗИТУ З УРАХУВАННЯМ ФОРМИ ВКЛЮЧЕННЯ.....	44
1.1. Перетворення трифазної моделі за допомогою методу збурення форми межі для композиту з круглими циліндричними включеннями.....	44
1.2. Визначальні співвідношення трифазної моделі композиту з квадратними циліндричними включеннями.....	47
РОЗДІЛ 2. АСИМПТОТИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ТРИФАЗНОЇ МОДЕЛІ КОМПОЗИТУ.....	49
2.1. Використання апарату апроксимацій Паде для розширення області застосування трифазної моделі композиту з круглими включеннями.....	49
2.2. Модифікована трифазна модель композиту.....	51
РОЗДІЛ 3. АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ВИСОКОПРОВІДНИХ ЩІЛЬНО УПАКОВАНИХ КОМПОЗИТИВ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ЗМАЗКИ.....	54
3.1. Асимптотичні співвідношення теорії змазки для волокнистих композитів із включеннями квадратного профілю.....	54
3.2. Застосування теорії змазки при розв'язанні локальної задачі для композитів із круглими циліндричними включеннями.....	55
3.3. Модель теорії змазки для композитів із криволінійними ромбічними включеннями.....	57
3.4. Розрахункова модель розв'язку задачі на комірці методом теорії змазки для гексагональної решітки.....	58
3.5. Двосторонні оцінки асимптотики ефективного параметра для композита гексагональної структури.....	60

	21
3.6. Власні коливання мембрани з гексагональним масивом круглих включень.....	62
3.7. Нестационарний теплообмін у композитній мембрані з круглими включеннями гексагональної структури.....	63
<b>РОЗДІЛ 4. ПРИКЛАДАННЯ АПАРАТУ АСИМПТОТИЧНО ЕКВІВАЛЕНТНИХ ФУНКЦІЙ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР.....</b>	<b>65</b>
4.1. Визначення ефективного коефіцієнта теплопровідності композиту з квадратними включеннями шляхом зрощування асимптотичних розкладень.....	65
4.2. Асимптотичний розв'язок для круглих включень з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз методом пилкоподібного перетворення аргументу.....	66
4.3. Узагальнення асимптотичного розв'язку теорії змазки для непровідних круглих включень з інтерфейсом.....	70
4.4. Асимптотичні розв'язки для композитів із криволінійними ромбічними включеннями за наявності прошарку на межі розділу фаз.....	71
4.5. Асимптотичний розв'язок для гексагонального масиву круглих включень з інтерфейсом за допомогою апарату асимптотично еквівалентних функцій, визначених у термінах $\tau$ -перетворення.....	72
4.6. Асимптотична оцінка ефективної провідності гексагонального масиву непровідних круглих включень за наявності інтерфейсу на межі розділу фаз.....	73
<b>РОЗДІЛ 5. АНАЛІЗ УМОВ КОНТАКТУ «МАТРИЦЯ – ВКЛЮЧЕННЯ» В КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУРАХ.....</b>	<b>74</b>
5.1. Моделі двофазних волокнистих композитів, що описують умови контакту «матриця – включення».....	74
5.2. Асимптотичні наближення в моделях двофазних волокнистих композитів та фізична еквівалентність структур.....	75

5.3. Асимптотичні представлення ефективних параметрів композитів різної структури.....	22
77	
РОЗДІЛ 6. ПОБУДОВА ВИЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ФОРМУЛИ МАКСВЕЛЛА.....	79
6.1. Суть двофазної моделі волокнистого композиту з малими включеннями квадратного перерізу.....	79
6.2. Розв’язок задачі методом Шварца на основі двофазної моделі для композиту з квадратними включеннями малого розміру.....	80
6.3. Побудова ітерацій вищих порядків методу Шварца в рамках двофазної моделі композиту.....	81
6.4. Побудова вищих наближень формули Максвелла для волокнистих композитів із круглими включеннями.....	81
6.5. Аналіз меж застосування розв’язку за N-ітераційною процедурою методу Шварца та асимптотична оцінка поправки формули Максвелла.....	82
6.6. Уточнення формули Максвелла із застосуванням техніки Паде-апроксимацій.....	83
6.7. Асимптотичне осереднення вищого порядку для динамічних задач.....	86
РОЗДІЛ 7. ПРИКЛАДЕННЯ ТЕХНІКИ НЕГЛАДКОГО ПІЛКОПОДІБНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ АРГУМЕНТУ ДО РОЗВ’ЯЗКУ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ.....	89
7.1. Поняття $\tau$ -перетворення та його основні математичні співвідношення.....	89
7.2. Застосування техніки несиметричного пілкоподібного перетворення аргументу до періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів.....	91
7.3. Дослідження нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні з використанням $\tau$ -перетворення за часом.....	93

	23
7.4. Асимптотичний і точний розв’язки задачі: чисельний аналіз та порівняння результатів.....	94
РОЗДІЛ 8. МОДЕЛІ КОНТИНУАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ.....	96
8.1. Чисельне дослідження моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів.....	96
8.2. Перехід від дискретного до неперервного середовища: вплив зміни симетрії на асимптотичну поведінку хвиль.....	98
8.3. Апроксимація функції Гріна решітки Лагранжа неперервними аналогами.....	101
8.4. Про концепцію зосереджених сил у середовищах з мікроструктурою.....	102
8.5. Континуальні моделі дискретного рівняння Ферхюльста.....	103
8.6. Хаос у неперервній моделі: чисельний аналіз.....	104
ВИСНОВКИ.....	109
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	120
ДОДАТОК А. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ.....	139
ДОДАТОК Б. ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ.....	155
ДОДАТОК В. ВІДОМОСТІ ПРО НАУКОВУ ДОПОВІДЬ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ДИСЕРТАЦІЇ НА СЕМІНАРІ «MATERIALICA+ RESEARCH GROUP» (ПОЛЬЩА).....	159
ДОДАТОК Г. ВІДОМОСТІ ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ У ПРОЕКТІ НАЦІОНАЛЬНОГО НАУКОВОГО ЦЕНТРУ ПОЛЬЩІ.....	163
ДОДАТОК Д. ДОВІДКА ПРО ПРАКТИЧНЕ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ В НАУКОВО-ДОСЛІДНОМУ ІНСТИТУТІ ГІРНИЧИХ ПРОБЛЕМ АКАДЕМІЇ ІНЖЕНЕРНИХ НАУК УКРАЇНИ.....	165

## ВСТУП

**Сутність науково-прикладної проблеми,** що розглядається в дисертаційній роботі, полягає в побудові асимптотичних моделей і розробці математичних методів, що дозволяють коректно описувати композити різної структури та фізичні процеси, що відбуваються в них, обчислювати ефективні характеристики композитних матеріалів в області граничних значень їх фізичних і геометричних параметрів, будувати моделі континуальної апроксимації дискретних систем для обґрунтованого представлення особливостей розв'язку дискретних задач неперервними функціями.

**Обґрунтування вибору теми дослідження.** Механіка композитних матеріалів є галуззю знань, що швидко розвивається у всіх аспектах – чи то теоретичні дослідження, експериментальні досліди або практичні прикладення. Це зумовлено сучасними вимогами науково-технічного прогресу: використанням у всіх галузях техніки складних складових конструкцій, які повинні поєднувати легкість із високою міцністю, застосуванням інноваційних виробничих технологій, створенням нових композитних матеріалів.

У виробництві використовуються різні за властивостями композитні матеріали, що приймають у виробках різноманітну форму. Однак спочатку матеріал мало коли має поєднання властивостей, що точно відповідають вимогам конкретного застосування. Тому з погляду конструкційної доцільності обґрунтованим є застосування композитних матеріалів, найважливішим достоїнством яких є можливість створення з них конструкцій із заздалегідь заданими властивостями, що якнайповніше відповідали б характеру та умовам експлуатації.

Різноманітність складових композитних матеріалів – волокон та матричного заповнювача, а також схем армування, технологічних процесів створення композиту – дозволяють цілеспрямовано регулювати фізичні характеристики матеріалу: міцність, жорсткість, стійкість, рівень робочих температур тощо шляхом варіювання його складу, зміни співвідношення



компонентів та макроструктури.

Саме цими факторами обумовлено в сучасний час повсюдне застосування композитних матеріалів і конструкцій практично у всіх галузях техніки: авіа- і ракетобудуванні, будівництві, приладобудуванні, при виробництві товарів побутової техніки, медичного обладнання, спортивної промисловості тощо.

Особливу роль відіграють композитні матеріали у будівельній індустрії:

- використання композитів забезпечує важливі для будівельних конструкцій переваги: міцність, довговічність та корозійну стійкість. Це робить композити незамінними при будівництві мостів, морських споруд, залізничних платформ, інженерних опор, систем водопостачання та багато іншого;

- композиційні матеріали використовують для армування бетону. Створені на основі армувальних наповнювачів зі скловолокна, композитні матеріали застосовують при виготовленні несущих конструкцій, тим самим забезпечуючи їм необхідний запас міцності. Використання епоксидного сполучного дозволяє досягти високих механічних характеристик конструкцій;

- куполи та дахи на основі композиційних матеріалів міцніші за традиційні та забезпечують економію ваги до 85%. Досвід їх виготовлення показує, що використання композитних матеріалів призводить до здешевлення будівництва та збільшення його швидкості, простоти виготовлення та монтажу виробів: підйом та встановлення композитних куполів набагато простіше, ніж зі стандартних металевих конструкцій, а зручність та можливість ремонту значно вищі. Крім того, конструкції з композитів не схильні до корозії й більш стійкі до впливу зовнішнього середовища;

- важливою перевагою композитних матеріалів у порівнянні з класичними рішеннями є можливість виготовлення нових дизайнерських конструкцій, які при виробництві з металу і бетону будуть надто важкими та невиправдано дорогими. Композит добре піддається фарбуванню і за видовими параметрами нічим не поступається конструкціям з металу;

- полімерні композити виготовляються різними способами: литтям під тиском або вільним литтям, пресуванням, екструзією, з використанням

намотувальних технологій, на основі препрегів і т. і. Але в усіх випадках характерним для полімерів є те, що виріб і матеріал виходять в єдиному процесі. Тому завдання, що виникають при розробці технології виготовлення полімерних матеріалів, безпосередньо пов'язані із задачами розрахунку характеристик міцності самих композитів і виготовлених з них конструкцій.

Таким чином, значна структурна відмінність композитних матеріалів як із точки зору їх фізичних властивостей, так і за геометричною структурою, найширший спектр їх практичного застосування, особливості виробничих технологій визначають різноманіття та складність наукових проблем, що виникають у будівельній механіці та механіці композитів, дослідження яких є актуальною науковою проблемою, що потребує глибокого осмислення на фізичному рівні, фундаментального теоретичного обґрунтування та строгого математичного розв'язання.

#### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, грантами:**

1) Дисертаційне дослідження виконувалося згідно з чинним законодавством України в галузі архітектури та містобудування, нормативною базою будівництва, стратегією регіонального розвитку України, що забезпечують державну підтримку наукових досліджень і впровадження фундаментальних наукових знань у галузі містобудування, архітектури й будівництва (Закон України № 687-XIV у редакції від 31 березня 2023 р. «Про архітектурну діяльність») та визначають фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України як пріоритетні напрями розвитку науки і техніки (Закон України № 2623-III у редакції від 13 січня 2024 р. «Про пріоритетні напрями розвитку науки і техніки»).

Зокрема, йдеться про дослідження в галузі створення нових матеріалів з покращеними теплопровідними, електропровідними, оптичними, магнітними та іншими функціональними характеристиками для різних видів новітньої техніки, створення нових матеріалів та композитів на їх основі, включаючи композити з двовимірними структурами, для потреб сучасної нано- і мікроелектроніки,

електротехніки, альтернативної енергетики й енергозбереження, транспорту. Надважливим завданням у сучасних реаліях є створення нових композиційних матеріалів для літальних апаратів і лопатей вертольотів, для авіаційних двигунів – на основі надтвердих матеріалів, зміцнених жароміцними сплавами, розроблення надлегких алюмоматричних композитів для військових потреб, композитних матеріалів для використання в екстремальних умовах (Постанова Кабінету Міністрів України № 980 у редакції від 22 грудня 2023 р. «Деякі питання визначення середньострокових пріоритетних напрямів інноваційної діяльності галузевого рівня на 2023 рік»).

2) Проект Національного Наукового Центру Польщі. Research grant OPUS 14 N. 2017/27/B/ST8/01330, Lodz University of Technology, Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics; співвиконавець.

3) Грант Фонду Саймонса (США). Award ID: 1160642, Project Title: “Simons Foundation Support to Researchers in Ukraine”, Program: “Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants”; головний дослідник.

**Мета дослідження.** Мета роботи полягає в побудові, математичному описі та фізичному обґрунтуванні асимптотичних моделей композитів різної структури, розвитку аналітичних методів для їх фундаментального теоретичного представлення та оцінки меж застосування теорій, на підставі яких вони розроблені.

**Завдання дослідження:**

1) Провести узагальнення трифазної моделі композиту з урахуванням форми включення.

2) Отримати асимптотичні наближення трифазної моделі композиту, що розширюють область її застосування.

3) Знайти асимптотичні розв’язки для високопровідних щільно упакованих композитів на основі теорії змазки.

4) З використанням апарату асимптотично еквівалентних функцій провести дослідження граничних станів композитних структур.

5) Провести аналіз умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

- 6) Побудувати вищі наближення формули Максвелла.
- 7) Обґрунтувати застосування техніки негладкого пилкоподібного перетворення аргументу до розв'язку задач механіки періодичної структури.
- 8) Дослідити моделі континуальної апроксимації дискретних систем.

**Об'єкт дослідження** – процес аналітичних досліджень у сфері механіки композитів щодо строгого математичного обґрунтування асимптотичних методів дослідження макроскопічних властивостей гетерогенних середовищ та побудови розрахункових моделей для композитних матеріалів різної структури.

**Предмет дослідження** – асимптотичні методи та моделі в механіці композитних матеріалів.

**Методи дослідження:**

- для узагальнення трифазної моделі композиту з урахуванням форми включення використовувався метод збурення форми межі у поєднанні з теорією осереднення та технікою двохмасштабних розкладень; метод збурення форми межі застосовувався також для апроксимації квадратного контуру включення при розробці двофазної моделі композиту;
- у рамках методу асимптотичної гомогенізації здійснювалась побудова наближень вищих порядків при дослідженні власних коливань мембрани з гексагональним масивом круглих включень;
- з використанням перетворення Лапласа та методу осереднення було досліджено нестационарну теплопровідність у волокнистих композитних матеріалах гексагональної структури;
- апарат апроксимацій Паде використовувався для розширення області застосування трифазної моделі композиту з круглими включеннями, при побудові двосторонніх оцінок асимптотики ефективного параметра для композита гексагональної структури, дослідженні моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів, апроксимації функції Гріна решітки Лагранжа неперервними аналогами, при побудові континуальної моделі рівняння Ферхюльста з хаотичною поведінкою;
- методи двох- і триточкових інтерполяцій Паде та зрощування Паде-

апроксимацій використовувалися при побудові уточнювальних співвідношень формули Максвелла;

- наближення теорії змазки (асимптотики тонкого шару) застосовувалися при розв'язку локальних задач для волокнистих композитів з різною структурою та формою включень;

- математичний опис модифікованої трифазної моделі композиту виконувався за допомогою методу теорії змазки в поєднанні з аналітичним алгоритмом трифазної моделі;

- метод зрощування асимптотичних розкладень використовувався для визначення ефективного коефіцієнта теплопровідності композитного масиву з циліндричними включеннями квадратного профілю;

- апарат асимптотично еквівалентних функцій застосовувався у дослідженні граничних станів композитних структур із квадратними та гексагональними решітками включень;

- аналіз умов контакту «матриця – включення» у композитних структурах за наявності тонкого прошарку на межі розділу фаз проводився за допомогою методу асимптотично еквівалентних функцій, визначених у термінах  $\tau$ -перетворення;

- метод послідовних наближень (альтернуючий метод) Шварца використовувався при уточненні формули Максвелла на основі двофазної моделі композиту;

- при побудові вищих наближень формули Максвелла для композитів з круглими та квадратними включеннями застосовувався спосіб знаходження розв'язку в рядах;

- техніка негладкого пилкоподібного перетворення аргументу застосовувалася до розв'язку періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів та у дослідженні нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні;

- при дослідженні нестационарного теплообміну в композитній мембрані застосовувався математичний апарат перетворення Лапласу та метод

асимптотичної гомогенізації;

– апарат теорії функцій комплексної змінної використовувався при аналізі поняття зосередженої сили в теорії пружності;

– чисельні методи використовувалися при аналізі результатів моделювання поширення хвиль у неперервному середовищі та дослідженні хаосу у неперервній моделі логістичного рівняння. Зокрема, чисельне інтегрування для розв'язку задачі Коші виконувалося методом Адамса – Башфорта – Моултона (метод предиктора-коректора).

### **Наукова новизна одержаних результатів:**

1) Вперше на основі теорії осереднення, трифазної моделі композиту та методу збурення форми межі отримано визначальні співвідношення для ефективної теплопровідності композитного матеріалу, армованого волокнами круглого профілю, з урахуванням форми включень [1]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що знайдено розв'язок, який дозволяє враховувати геометрію включень, а не лише їх концентрацію. Побудовано єдиний аналітичний вираз ефективної провідності у всьому діапазоні доперколяційних значень розміру включень до порога протікання.

2) Вперше з використанням методу збурення форми межі проведено узагальнення трифазної моделі для композитів із квадратними циліндричними включеннями [2]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що отриманий вираз приведенного параметра теплопровідності урахує форму включень і коректно працює в усьому діапазоні зміни геометричного розміру включень та їх фізичної характеристики, включаючи граничні випадки.

3) Дістали подальший розвиток методи дослідження ефективної теплопровідності композитного матеріалу з циліндричними включеннями квадратного профілю на основі теорії змазки [3]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що знайдено розв'язок задачі й отримано асимптотичне співвідношення, що характеризує стан ефективного гомогенного середовища у випадку щільно упакованих висококонтрастних композитів.

4) Вперше обґрунтовано доцільність використання апарату апроксимацій Паде щодо розширення області застосування трифазної моделі для волокнистого композиту з круглими включеннями [4]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в знаходженні розв'язку, який дозволяє не тільки принципово розширити кількісні межі застосування трифазної моделі, а й якісно описати фізичний процес, що відбувається в композиті при великих розмірах включень гранично великої провідності – перколяційний перехід та утворення нескінченного кластеру.

5) Вперше побудовано модифіковану трифазну модель композиту [5]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що проведеним асимптотичним і чисельним аналізом доведено адекватність моделі при всіх значеннях фізико-геометричних характеристик композита, включаючи асимптотичні співвідношення в граничних випадках.

6) Вперше на основі техніки Паде-апроксимацій для асимптотичного виразу ефективного параметра композита гексагональної структури визначені двосторонні оцінки з більш вузькою «вилкою», ніж межі Хашина – Штрікмана, при будь-яких значеннях розміру включень [6]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в узагальненні підходу теорії змазки для включень середніх розмірів та отриманні двосторонніх оцінок ефективного параметра з використанням апарату апроксимацій Паде.

7) Вперше досліджено власні коливання мембрани з гексагональним масивом круглих включень на основі аналітичних співвідношень теорії осереднення [7]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що в загальному вигляді представлені аналітичні вирази власних функцій і частот коливань та перших поправок до них; показано, за яких умов буде отримано ненульову першу поправку власної частоти.

8) Дістало подальший розвиток дослідження нестационарного теплообміну в композитній мембрані гексагональної структури з круглими включеннями [8]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає у використанні перетворення Лапласа та методу асимптотичної гомогенізації для знаходження визначальних аналітичних співвідношень та визначенні виразу

ефективної теплопровідності у замкнутій формі.

9) Вперше запропоновано застосування методу пилкоподібного перетворення аргументу у поєднанні з методом асимптотично еквівалентних функцій для математичного опису моделей композитів з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз; побудовано асимптотичні моделі для щільно упакованих ідеально провідних та непровідних композитів із квадратною сіткою круглих включень за різних умов контакту фаз [9]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в розробці й обґрунтовані математичного апарату на основі  $\tau$ -перетворення аргументу і методу асимптотично еквівалентних функцій для аналізу умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

10) Вперше проаналізовано поняття фізичної еквівалентності композитних структур; проведено класифікацію та знайдено відповідні асимптотичні вирази ефективних параметрів композитів різної структури за умовами контакту «матриця – включення»: по матеріалу матриці; по матеріалу включень; при наявності тонкого прошарку на межі розділу фаз; за методом несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу в поєднанні з математичним апаратом асимптотично еквівалентних функцій і теорією змазки побудовано асимптотичні моделі для композитів із квадратною сіткою криволінійних ромбічних включень і гексагональним масивом круглих включень, включаючи випадок інтерфейсу на межі розділу фаз [10]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що використання математичного апарату негладкого перетворення аргументу та асимптотично еквівалентних функцій дало можливість врахувати локальні ефекти на межі розділу фаз композиту, які неможливо описати безпосередньо в рамках теорії осереднення, що з фізичної точки зору дозволило значно розширити клас аналізованих структур композитів за єдиним запропонованим підходом.

11) Вперше шляхом зрощування асимптотичних співвідношень одержано аналітичний вираз для ефективної теплопровідності композиту з циліндричними включеннями, квадратними в перерізі [11]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що шляхом поетапного зрощування асимптотичних співвідношень за розміром і провідністю включень побудовано



єдиний аналітичний вираз приведеного коефіцієнта та визначено і візуально проілюстровано області зміни параметрів композиту, в яких його значення значуще визначається відповідними асимптотичними розв'язками.

12) Вперше запропоновано двофазну модель композиту та проведено асимптотичний аналіз формули Максвелла на її основі [12]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в побудові двофазної моделі композиту для апроксимації квадратного контуру включення, визначенні сутності такої ідеалізації й послідовного уточнення форми включення за методом збурення форми межі при асимптотичному аналізі формули Максвелла.

13) Вперше з використанням альтернуючого методу Шварца побудовані вищі наближення формули Максвелла для композитів, армованих волокнами круглого профілю [13]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в доведенні, що головна частина асимптотичного розкладення ефективного параметра при малих розмірах включень співпадає з формулою Максвелла, і визначенні порядку її першої ненульової поправки.

14) Вперше із застосуванням математичного апарату апроксимацій Паде уточнено формулу Максвелла для волокнистих композитів із круглими включеннями [14]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в розробці й доведенні ефективності методу перебудови ітераційного розв'язку, за яким визначаються «пряма» і «зворотна» складові – Паде-апроксимації за розміром включення, що надалі зрощуються в триточкову апроксимацію Паде за провідністю включень.

15) Дістало подальший розвиток дослідження асимптотичного осереднення вищого порядку для динамічних задач [15]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в побудові наближень вищого порядку для неоднорідної системи з неперервними параметрами, системи з періодично сконцентрованими дискретними елементами і 1D кусково-неперервної системи.

16) Вперше застосована техніка косокутного  $\tau$ -перетворення аргументу до розв'язку періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів; встановлено умови самоурівноваженості масових сил на періоді; визначено умову виключення з періодичного розв'язку середньої складової; знайдені

асимптотичні співвідношення в граничних випадках жорсткісних та геометричних характеристик фаз композиту [16]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в розробці математичного апарату для розв'язку періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів на основі техніки негладкого косокутного пилкоподібного перетворення аргументу.

17) Вперше використано  $\tau$ -перетворення за часом для дослідження нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні [17]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає у застосуванні  $\tau$ -перетворення часової змінної та розробці процедури зведення розв'язку вихідного рівняння до розв'язку в області комірки крайової задачі, що не містить сингулярних функцій.

18) Отримало подальший розвиток чисельне дослідження моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів [18]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в проведенні чисельного дослідження моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів: класичної континуальної апроксимації, проміжної континуальної моделі, квазіконтинуальної апроксимації й уточненої квазіконтинуальної моделі.

19) Дістало подальший розвиток дослідження асимптотичного характеру хвиль при переході від дискретного до неперервного середовища; проведено аналіз різних неперервних наближень для дискретної моделі – решітки Лагранжа [19]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в доведенні близької відповідності розв'язку, що описує хвильовий рух дискретної решітки, та розв'язку за неперервною моделлю, побудованою з використанням апроксимацій Паде.

20) Дістало подальший розвиток використання апарату двохточкових апроксимацій Паде для побудови функції Гріна решітки Лагранжа й коректного опису основних особливостей розв'язку дискретних задач неперервними функціями [20]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що показано значне покращення неперервної апроксимації функції Гріна, побудованої з використанням апарату двохточкових апроксимацій Паде, порівняно з класичним неперервним наближенням, яке дає задовільні результати

лише для низьких частот.

21) Вперше доведено наявність хаосу в континуальній моделі рівняння Ферхюльста, побудованій з використанням апроксимації Паде; наявність хаосу в системі підтверджено побудовою фазової траєкторії, перетину Пуанкаре та траєкторій у тривимірному просторі, розрахунком показників Ляпунова і розмірностей Ляпунова [21]. Відмінність одержаних результатів від відомих раніше полягає в тому, що розроблено процедуру континуалізації дискретного логістичного рівняння з хаотичним поведінкою шляхом перетворення диференціального оператора на діагональну апроксимацію Паде.

### **Теоретичне значення роботи:**

1) Проведене дослідження охоплює широкий клас композитів різної структури, з різними фізичними та геометричними характеристиками включень, для яких з використанням строгого математичного апарату отримано опис та наведено обґрунтування зв'язку ефективних властивостей з характеристиками компонентів, виконано аналіз особливостей поведінки композитів, зумовлених їхньою гетерогенністю.

2) Побудовані, у строгій математичній постановці описані та фізично обґрунтовані асимптотичні моделі композитних структур різної природи:

- трифазні моделі волокнистого композиту з круглими та квадратними включеннями;
- модифікована трифазна модель композиту з циліндричними включеннями;
- моделі теорії змазки;
- модель двовимірних композитів гексагональної структури;
- моделі двофазних волокнистих композитів для включень різних форм та умов контакту «матриця – включення»;
- моделі двофазних волокнистих композитів з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз;
- двофазні моделі композитів з круглими та квадратними включеннями для побудови узагальнених співвідношень формули Максвелла;

- моделі континуальної апроксимації одновимірних дискретних систем;
- континуальна модель з хаотичною поведінкою.

3) Побудовані асимптотичні моделі коректно працюють в області граничних значень фізичних і геометричних характеристик композиту, тобто саме в тих областях, де при використанні чисельних методів виникають труднощі обчислювального характеру.

4) У строгій математичній постановці розглянуто методи дослідження макроскопічних властивостей композитних матеріалів, запропоновано ефективні аналітичні алгоритми дослідження композитів, армованих дискретними волокнами.

5) Побудовано математичні співвідношення, що описують приведені параметри композитів залежно від геометричної структури армувальних волокон та їх фізичних характеристик.

6) Узагальнені, математично обґрунтовані аналітичні співвідношення, отримані для волокнистих композитів, дозволяють при варіюванні їх фізико-геометричних параметрів описувати цілий клас структур, тоді як чисельні алгоритми практично не допускають узагальнень і не дозволяють отримати уявлення про клас структур у цілому.

7) Побудовані асимптотичні моделі та розроблений для їх опису математичний апарат допускають узагальнення та можуть бути використаними при проведенні подальших фундаментальних досліджень у галузі будівельної механіки та механіки композитів.

#### **Практичне значення роботи:**

1) Побудовані в дисертації асимптотичні моделі композитних структур різної природи, моделі континуальної апроксимації одновимірних дискретних систем, континуальна модель з хаотичною поведінкою були використані в наукових розробках за дослідницьким грантом OPUS 14 N. 2017/27/B/ST8/01330 Національного Наукового Центру Польщі.

2) Результати дисертації були впроваджені в Науково-дослідному інституті гірничих проблем Академії Інженерних Наук України при розробці

низки тематик (АД-464, АД-465, АД-475, АД-476), присвячених вирішенню актуальних питань енергоефективності України, для дослідження макроскопічних властивостей композитних матеріалів.

3) Отримані в роботі аналітичні розв'язки та чисельні оцінки доцільно використовувати в інженерній практиці будівельної механіки при розрахунках ефективних параметрів волокнистих композитів із включеннями різної форми та умовами контакту фаз – за різних конструкційних вимог та технологічних умов виробництва композитних матеріалів.

4) Математичний апарат, розроблений у загальному вигляді для опису асимптотичних моделей, має сенс використовувати при розрахунках застосовуваних у будівництві композитів іншої структури.

5) Знайдені асимптотичні співвідношення доречно використовувати у фундаментальних та прикладних дослідженнях механіки композитів та будівельної механіки для оцінки чисельних розв'язків в області граничних значень параметрів композитів.

6) Моделі континуальної апроксимації стануть у нагоді при практичному дослідженні 1D лінійних хвильових процесів, зокрема, при проектуванні сейсмічно стійких будівельних конструкцій і споруд.

7) Побудовані моделі композитів різної структури й розроблені асимптотичні методи дослідження можуть використовуватися в навчальному процесі при викладанні варіативних навчальних дисциплін «Моделювання та аналітичні розв'язання задач механіки композитів», «Асимптотичні методи в інженерних задачах будівельної механіки» за освітньо-науковою програмою «Промислове та цивільне будівництво» при підготовці фахівців ступеня магістра і ступеня доктора філософії за спеціальністю 192 «Будівництво та цивільна інженерія».

8) Важливим фактором вбачається наявність тісного концептуального зв'язку між задачами щодо ефективних пружних властивостей композиту та визначенням їх ефективної провідності: всі методи, моделі та результати для пружних композитів мають аналоги за провідністю. Концептуальний зв'язок між теорією пружності та провідністю узагальнено в табл. 0.1 [22].

Таблиця 0.1 – Зв'язок між параметрами напружено-деформованого стану композиту та характеристиками за провідністю

Теорія пружності		Провідність	
$u_i =$	переміщення	$\varphi =$	температура
$\varepsilon_{ij} =$	деформації	$-\varphi_{,i} =$	градієнт
$\sigma_{ij} =$	напруги	$q_i =$	тепловий потік
$T_i =$	прикладена сила	$q_n =$	нормальна компонента потоку
$C_{ijkl} =$	пружні модулі	$\mu_{ij} =$	провідність
$S_{ijkl} =$	податливість жорстка фаза порожня фаза	$\rho_{ij} =$	питомий опір надпровідність термоізолятор

Більш того, фізичні процеси різної природи – тепло- і електропровідність, електро- і магнітостатика, дифузія – теж описуються ідентичними з математичної точки зору співвідношеннями [22]. Отже, побудовані в рамках теплопровідності асимптотичні моделі і розроблені методи їх математичного опису застосовні також для задач теорії пружності, електропровідності, електро- і магнітостатики, дифузії що значно розширює сферу їх теоретичних та практичних прикладень.

#### **Достовірність отриманих результатів підтверджується:**

- використанням строго обґрунтованого математичного апарату та чисельним моделюванням за допомогою обчислювальних можливостей сучасних математичних пакетів;
- всебічно і ретельно виконаним чисельним та асимптотичним аналізом отриманих розв'язків;
- оцінкою області застосування побудованих моделей та аналітичних методів їх опису;
- порівнянням в окремих випадках з асимптотичними розв'язками, чисельними розрахунками та експериментальними даними інших авторів;
- порівнянням з наближеними аналітичними розв'язками, знайденими на основі спрощених фізичних моделей чи інженерних схем;
- використанням для оцінки розв'язків меж Хашина – Штрікмана або (при можливості) більш вузьких границь, які враховують форму включення;

- аналізом граничних станів структури та відповідних їм розв'язків;
- аналізом фізичної суті розв'язків та чіткою відповідністю отриманих результатів фізичному змісту задач.

### **Особистий внесок здобувача.**

Основні результати дослідження викладені в опублікованій без співавторів монографії [23]. У статтях, виконаних у співавторстві, авторові належать такі результати: на основі теорії осереднення, трифазної моделі композиту та методу збурення форми межі побудовано моделі волокнистих композитів з урахуванням форми включень [1, 2]; знайдено розв'язок задачі для композита з високопровідними квадратними включеннями великих розмірів із застосуванням теорії змазки [3]; використано апарат апроксимацій Паде для розширення області застосування трифазної моделі для волокнистого композиту з круглими включеннями [4]; побудовано модифіковану трифазну модель композиту [5]; проведено узагальнення методу теорії змазки для ідеально провідних включень середніх розмірів та знайдені верхня і нижня оцінки приведенного параметра [6]; з використанням теорії асимптотичної гомогенізації отримані аналітичні співвідношення, що описують власні коливання мембрани з гексагональним масивом круглих включень [7]; побудовані визначальні аналітичні співвідношення в задачі нестационарного теплообміну в композитній мембрані гексагональної структури з круглими включеннями [8]; на основі методів пилкоподібного перетворення аргументу й асимптотично еквівалентних функцій розроблено математичний апарат для опису моделей композитів з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз [9, 10]; отримано аналітичний вираз ефективної теплопровідності композиту з квадратними циліндричними включеннями шляхом зрощування асимптотичних співвідношень [11]; побудовано двофазну модель волокнистого композиту з квадратними в перерізі включеннями [12]; для композитів, армованих волокнами круглого профілю, знайдено вищі наближення формули Максвелла з використанням альтернуючого методу Шварца й апарату апроксимацій Паде [13, 14]; проведено аналітичне й чисельне дослідження асимптотичного осереднення вищого порядку для динамічних задач [15];

застосовано техніку пилкоподібного перетворення аргументу до періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів [16]; застосовано техніку  $\tau$ -перетворення за часом для дослідження нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні [17]; проведено чисельне дослідження моделей континуальної апроксимації дискретних систем [18, 19]; побудовані неперервні апроксимації функції Гріна решітки Лагранжа з використанням апарату двохточкових апроксимацій Паде [20]; проведено чисельний аналіз і доведено наявність хаосу в неперервній моделі, побудованій з використанням апроксимацій Паде [21].

### **Апробація результатів дослідження.**

За матеріалами дослідження було зроблено доповіді на 43 українських та міжнародних наукових конференціях, семінарах і конгресах: III Всесоюзна конференція «Міцність, жорсткість, технологічність виробів із композиційних матеріалів» (м. Запоріжжя, Україна, 24-26 жовтня 1989 р.); 30-а Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 5-9 вересня 1994 р.); Міжнародна конференція «Легковагі конструкції в цивільному будівництві» (м. Варшава, Польща, 25-29 вересня 1995 р.); Щорічна наукова конференція з математики й механіки (GAMM) (м. Прага, Чеська Республіка, 27-31 травня 1996 р.); 4-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Варшава, Польща, 8-15 липня 1996 р.); 3-я Європейська конференція з механіки твердого тіла (EUROMECH) (м. Стокгольм, Швеція, 18-22 серпня 1997 р.); 5-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Дніпропетровськ, 30 червня – 7 липня 1997 р.); Міжнародна конференція «III школа геомеханіки» (м. Глівіце, Польща, 23-26 листопада 1997 р.); X Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 20-23 квітня 1998 р.); Перша міжнародна конференція «Наука і освіта '98». Фізико-математичні науки. Технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Одеса – м. Кривий Ріг – м. Київ – м. Харків – м. Дніпродзержинськ, Україна, 23-30 квітня 1998 р.); 6-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Варшава, Польща, 6-11



липня 1998 р.); 32-а Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 5-9 вересня 1998 р.); 5-а Європейська реологічна конференція (м. Порторож, Словенія, 6-11 вересня 1998 р.); Міжнародна конференція з раціональних апроксимацій (ICRA 99) (м. Антверпен, Бельгія, 6-11 червня 1999 р.); 7-й Польсько-Український семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 24-29 червня 1999 р.); Міжнародна конференція з інженерної реології (ICER '99) (м. Зелена Гора, Польща, 27-30 червня 1999 р.); 8-й Польсько-Український семінар (м. Варшава, Польща, 26-30 червня 2000 р.); 4-а Європейська конференція з механіки твердого тіла (EUROMECH) (м. Мец, Франція, 26-30 червня 2000 р.); Третій всесвітній конгрес з нелінійного аналізу (м. Катанія, Італія, 19-26 липня 2000 р.); 33-я Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 1-5 вересня 2000 р.); Перша всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2001». Технічні та фізико-математичні науки (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Донецьк – м. Слов'янськ, Україна, 25-27 червня 2001 р.); 9-й Польсько-Український семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 27 червня – 1 липня 2001 р.); Перша всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2001». Технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Суми, Україна, 5-7 листопада 2001 р.); Друга всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2002». Фізико-математичні та технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Черкаси – м. Львів, Україна, 10-24 травня 2002 р.); XII Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 9-13 червня 2002 р.); 10-й Польсько-Український семінар (м. Варшава, Польща, червень 2002 р.); Міжнародна конференція «Легковагі конструкції в цивільному будівництві» (м. Варшава, Польща, 24-28 червня 2002 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Динаміка наукових досліджень». Архітектура. Механіка (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Харків, Україна, 28 жовтня – 4 листопада 2002 р.); Третя всеукраїнська наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (м. Дніпродзержинськ, Україна, 20-23 квітня 2003 р.); Міжнародна науково-практична конференція «Україна наукова '2003». Технічні науки. Математика (м. Дніпропетровськ – м. Запоріжжя, Україна, 16-20

червня 2003 р.); XI Українсько-польський семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 23-27 червня 2003 р.); II Міжнародна конференція з інженерної реології (м. Зелена Гора, Польща, 24-27 серпня 2003 р.); VIII Міжнародна науково-практична конференція «Динаміка наукових досліджень '2005». Технічні науки (м. Дніпропетровськ, Україна, 20-30 червня 2005 р.); XV Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 26-30 травня 2008 р.); X Міжнародна конференція з динамічних систем (м. Лодзь, Польща, 7-10 грудня 2009 р.); Міжнародна науково-технічна конференція «Міцність матеріалів та елементів конструкцій», присвячена 100-літтю з дня народження академіка НАН України Г. С. Писаренка (м. Київ, Україна, 28-30 вересня 2010 р.); VIII Європейська конференція з нелінійної динаміки (ENOC 2014) (м. Відень, Австрія, 6-11 липня, 2014 р.); XIII Міжнародна конференція «Динамічні системи – теорія та прикладання» (DSTA) (м. Лодзь, Польща, 7-10 грудня 2015 р.); 13-й Онлайн-конгрес Міжнародного товариства аналізу, його застосування та обчислення (ISSAC) «Конструктивні методи в теорії композитних і пористих середовищ» (м. Гент, Бельгія, 2-6 серпня 2021 р.); Колоквіум Євромех (EUROMECH Colloquium) 626 «Механіка висококонтрастних еластичних композитів (м. Кіль, Велика Британія, 6-8 вересня 2021 р.); 16-а Міжнародна конференція «Динамічні системи – теорія та прикладання» (DSTA) (м. Лодзь, Польща, 6-9 грудня 2021 р.); Міжнародна науково-технічна та навчально-методична конференція «Енергетичний менеджмент: стан та перспективи розвитку – REMS'2022» (м. Київ, Україна, 15-17 листопада 2022 р.); Всеукраїнська науково-практична конференція «Проблеми надійності та міцності машин і споруд» (м. Харків, Україна, 11-12 травня 2023 р.).

По результатах дисертації було зроблено наукову доповідь за сукупністю статей, опублікованих в журналах, віднесених до першого та другого квартилів (Q1 та Q2), на онлайн-семінарі «Materialica+ Research Group» (м. Краків, Польща, 20 грудня 2023 р.).

У повному обсязі дисертація доповідалася:

– на засіданні фахового семінару кафедри будівельної і теоретичної

механіки та опору матеріалів Придніпровської державної академії будівництва та архітектури (м. Дніпро, 29 грудня 2023 р.);

– на міжкафедральному науковому семінарі «Математичне моделювання та оптимізація складних систем» (Український державний хіміко-технологічний університет, м. Дніпро, 29 лютого 2024 р.).

### **Публікації.**

За результатами дослідження опубліковано всього 104 наукові праці, у тому числі:

– 1 монографія, що реферована в наукометричній базі даних Scopus;  
– 1 одноосібна монографія, опублікована в зарубіжному видавництві (Німеччина);

– 72 статті, з яких 38 статей реферовано в Scopus та/або Web of Science Core Collection (у тому числі 21 стаття – в журналах, віднесених до першого Q1 та другого Q2 квантилів, 3 статті – в журналах третього Q3 і четвертого Q4 квантилів); 2 статті – в збірнику наукових праць, що входить до переліку фахових видань Міністерства освіти і науки України; 32 статті – в наукових періодичних виданнях, продовжуваних виданнях та виданнях матеріалів конференцій (із яких 21 статтю опубліковано в зарубіжних видавництвах);

– 30 публікацій – тези доповідей на конференціях (із яких 17 видані в зарубіжних видавництвах).

**Структура та обсяг роботи.** Наукова доповідь складається з анотації, змісту, вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел (182 найменування) та 5 додатків. Загальний обсяг дисертації становить 165 сторінок; робота містить 96 рисунків і 6 таблиць. Основний текст дисертації складає 96 сторінок та додатки на 27 сторінках.

Автор висловлює глибоку подяку проф. Андріанову І. В. за багаторічну плідну співпрацю, конструктивні обговорення актуальних наукових проблем та результативні дискусії щодо пошуку шляхів їх розв'язання, які сприяли формуванню, розвитку й реалізації нового наукового напрямку – асимптотичних методів та моделей в механіці композитних матеріалів.

# РОЗДІЛ 1

## УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРИФАЗНОЇ МОДЕЛІ КОМПЗИТУ З УРАХУВАННЯМ ФОРМИ ВКЛЮЧЕННЯ

### 1.1. Перетворення трифазної моделі за допомогою методу збурення форми межі для композиту з круглими циліндричними включеннями [1]

Розглядається задача теплопровідності для двофазного мікронеоднорідного матеріалу, що складається з неперервної матриці та періодично розташованих у ній циліндричних включень, круглих у перерізі (рис. 1.1).

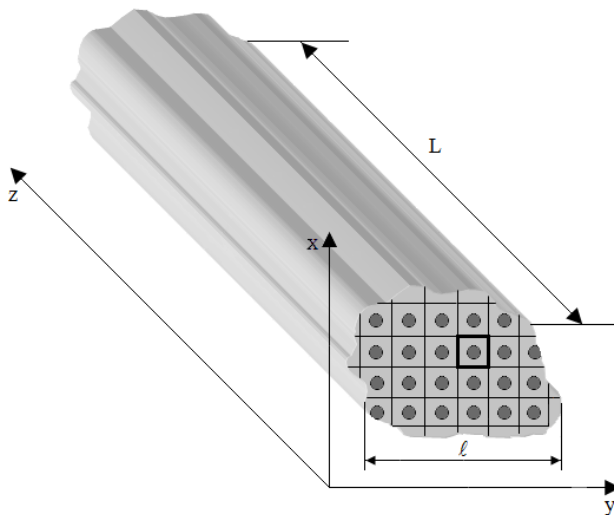


Рисунок 1.1 – Двофазний 2D періодичний композит із круглими циліндричними включеннями

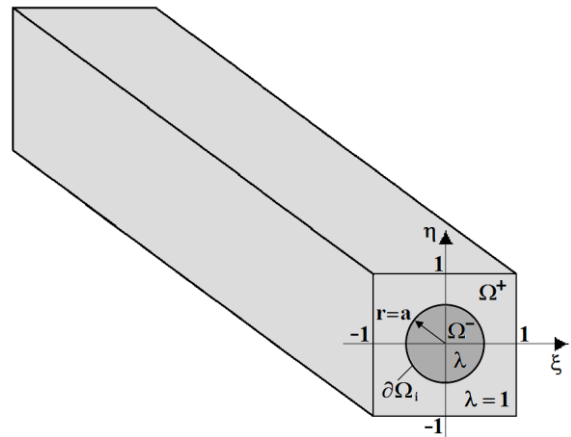


Рисунок 1.2 – Структурна комірка композиту з круглими в перерізі циліндричними включеннями

Застосування методу двохмасштабних розкладень [24] та теорії осереднення [25, 26] дає можливість звести початкову задачу до задачі в характерній структурній комірці композиту (рис. 1.2). В рамках трифазної моделі композиту (ТФМ) [27], з використанням методу збурення форми межі (МЗФМ) [28, 29] до розв'язку задачі на комірці, межа елементарної комірки апроксимується виразами:  $\xi = r_0 (\cos \theta + \varepsilon_1 \cos 3\theta)$ ,  $\eta = r_0 (\sin \theta - \varepsilon_1 \sin 3\theta)$ , де  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $1/9 \leq |\varepsilon_1| \leq 1/6$ .

Розв'язок задачі на комірці приводить у нульовому наближенні до виразу осередненого коефіцієнта  $q_{\text{ТФМ}}$ , що співпадає з формулою Максвелла (ФМ) [30].

У першому наближенні використання МЗФМ приводить до розв’язку, геометрична структура якого проілюстрована на рис. 1.3-1.5 і математично зводиться до осередненого рівняння виду:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|\Omega_1^*|} \left\{ \iint_{\Omega_{10}^+} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{10}^+}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{10}^+}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \lambda \iint_{\Omega_1^-} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{10}^-}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{10}^-}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \right. \\
 & \quad + \tilde{\lambda}_0 \iint_{\tilde{\Omega}_0} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{10}}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{10}}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \varepsilon_1 \left[ \iint_{\Omega_{10}^+} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{11}^+}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{11}^+}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \right. \\
 & \quad \left. + \lambda \iint_{\Omega_1^-} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{11}^-}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{11}^-}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \tilde{\lambda}_0 \iint_{\tilde{\Omega}_0} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{11}}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{11}}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \right. \quad (1.1) \\
 & \quad \left. + \iint_{\Omega_{i1}^+ \setminus \Omega_{10}^+} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{10}^+}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{10}^+}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \tilde{\lambda}_0 \iint_{\tilde{\Omega}_1 \setminus \tilde{\Omega}_0} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{10}}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{10}}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + \right. \\
 & \quad \left. + \tilde{\lambda}_1 \iint_{\tilde{\Omega}_0} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{10}}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}_{10}}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta \right\} = \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial y^2} \right) (\tilde{\lambda}_0 + \varepsilon_1 \tilde{\lambda}_1),
 \end{aligned}$$

де підкреслені члени визначають поправку за рахунок збурення контуру  $r = r_0^+$ , тобто поправку, що визначається членом порядку  $\varepsilon_1$ :  $r = \varepsilon_1 r_0^+ \cos 4\theta$ .

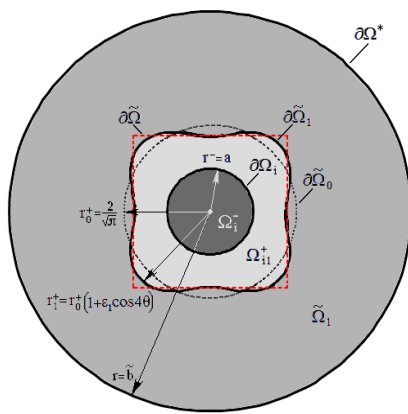


Рисунок 1.3 – Розрахункова модель трифазної структури в першому наближенні

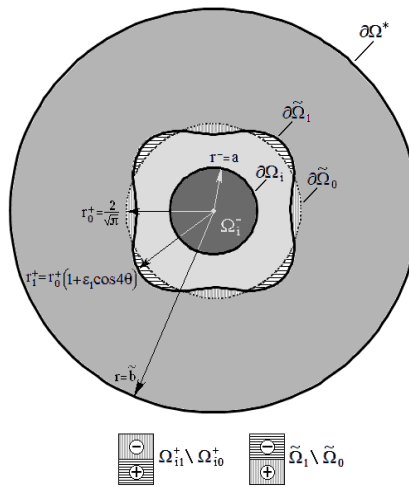


Рисунок 1.4 – Видозміна області комірки при осередненні з урахуванням першого наближення

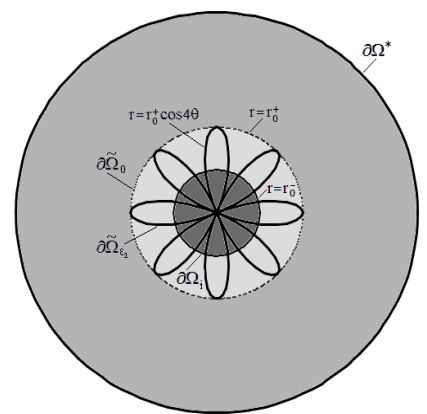


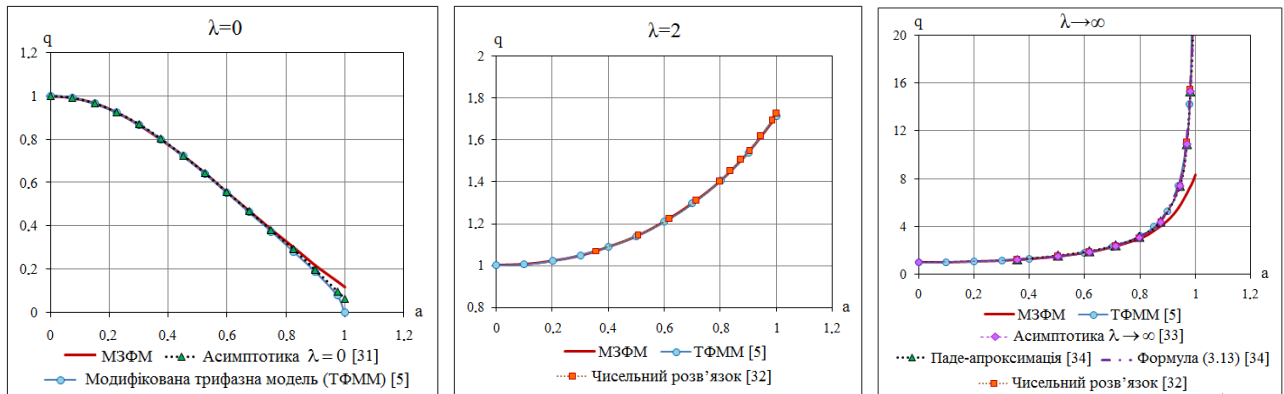
Рисунок 1.5 – Межа комірки в нульовому наближенні та перша поправка до неї

З урахуванням розв'язку першого наближення ефективний коефіцієнт теплопровідності  $q_{\text{МЗФМ}}$  визначається із (1.1) співвідношенням:

$$q_{\text{МЗФМ}} = q_{\text{ТФМ}} + \varepsilon_1^2 (q_{\text{ТФМ}} - 1)/4 + o(\varepsilon_1^2), \text{ де} \quad (1.2)$$

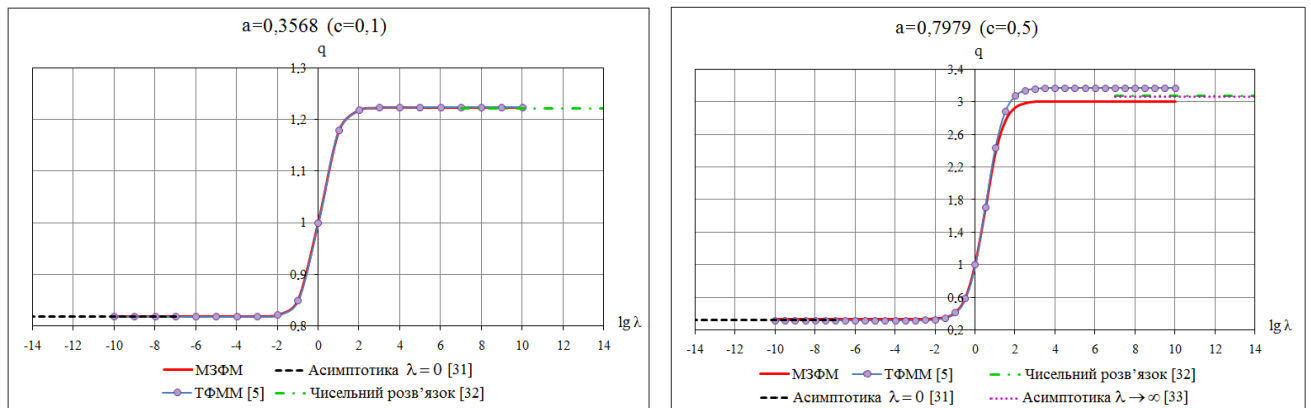
$$q_{\text{ТФМ}} = \frac{1 - \pi a^2/4 + \lambda(1 + \pi a^2/4)}{1 + \pi a^2/4 + \lambda(1 - \pi a^2/4)} - \text{формула Максвелла.} \quad (1.3)$$

На рис. 1.6, 1.7 представлені графіки осередненого коефіцієнта при різних значеннях розміру включень  $a$  та їх провідності  $\lambda$  у порівняння з результатами обчислень за даними інших авторів і на підставі різних моделей.



а) Непровідні включення  $\lambda = 0$       б) Провідність включень близька до провідності матриці  $\lambda = 2$       в) Абсолютно провідні включення  $\lambda \rightarrow \infty$

Рисунок 1.6 – Графіки ефективного коефіцієнта теплопровідності в залежності від розміру включень  $a$  при фіксованій провідності включень  $\lambda$



а) Включення малих розмірів  $a = 0,3568$  (концентрація включень  $c = \pi a^2/4 = 0,1$ )      б) Великі включення  $a = 0,7979$  ( $c = 0,5$ )

Рисунок 1.7 – Графіки ефективного коефіцієнта теплопровідності в залежності від провідності включень  $\lambda$  за фіксованого розміру включень  $a$

Формули (1.2), (1.3) достовірно описують поведінку гомогенізованого середовища в разі провідностей включень та матриці одного порядку  $\lambda \sim 1$  – для включень будь-якого розміру  $0 \leq a \leq 1$ ; якщо провідності включень і матриці значно відрізняється, тобто  $0 \leq \lambda \ll 1$  або  $1 \ll \lambda < \infty$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  – для розмірів включень  $0 \leq a \leq 0,8$ . Оцінка меж застосування моделі показала її обмеженість для включень великих розмірів  $a \rightarrow 1$  гранично великої провідності  $\lambda \rightarrow \infty$ . Фізична інтерпретація цього результату полягає в тому, що двочленне наближення МЗФМ не дає кількісного опису перколяційного переходу [35] і не показує якісну картину появи в композиті нескінченного кластера.

## 1.2. Визначальні співвідношення трифазної моделі композиту з квадратними циліндричними включеннями [2]

Апроксимація квадратних контурів комірки та включення при використанні МЗФМ [28, 29] має вигляд:  $r^- = r_0^- (1 + \varepsilon_1 \cos 4\theta + \dots)$ ,  $r^+ = r_0^+ (1 + \varepsilon_1 \cos 4\theta + \dots)$ , де  $\varepsilon_1 = \sqrt{\pi}/2 - 1 \approx -0,1138$ .

Розв'язок нульового наближення дає аналітичний вираз ефективного коефіцієнта теплопровідності, що співпадає з ФМ [30]. Після осереднення рівняння першого наближення перша поправка  $\tilde{\lambda}_1$  осередненого коефіцієнта визначається зі співвідношення

$$\tilde{\lambda}_1 \Delta u_0 = \frac{1}{4b^2} \left[ \iint_{\Omega_{i1}^+ \setminus \Omega_{i0}^+} \Delta u_0 d\xi d\eta + \lambda \iint_{\Omega_{i1}^- \setminus \Omega_{i0}^-} \Delta u_0 d\xi d\eta + \tilde{\lambda}_0 \iint_{\tilde{\Omega}_1 \setminus \tilde{\Omega}_0} \Delta u_0 d\xi d\eta + \oint_{\partial\tilde{\Omega}_{\varepsilon_1}} \frac{\partial u_{10}^+}{\partial n} dl + \right. \\ \left. + \tilde{\lambda}_0 \oint_{\partial\tilde{\Omega}_{\varepsilon_1}} \frac{\partial \tilde{u}_{10}}{\partial n} dl + \oint_{\partial\tilde{\Omega}_{i\varepsilon_1}} \left( \frac{\partial u_{10}^+}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u_{10}^-}{\partial n} \right) dl + \oint_{\partial\tilde{\Omega}_{i0}} \left( \frac{\partial u_{11}^+}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u_{11}^-}{\partial n} \right) dl + \oint_{\partial\tilde{\Omega}_0} \left( \frac{\partial u_{11}^+}{\partial n} + \tilde{\lambda}_0 \frac{\partial \tilde{u}_{11}}{\partial n} \right) dl \right] \quad (1.4)$$

у вигляді:  $\tilde{\lambda}_1 = 0$ .

На рис. 1.8 зображені «збурені» області інтегрування  $\Omega_{i1}^- \setminus \Omega_{i0}^-$ ,  $\Omega_{i1}^+ \setminus \Omega_{i0}^+$ ,  $\tilde{\Omega}_1 \setminus \tilde{\Omega}_0$ ; знаками «+» і «-» позначені додатні та від'ємні добавки до відповідних областей. На рис. 1.9 показані контури включення і комірки в нульовому наближенні та криві, що визначають поправки порядку  $\varepsilon_1$  у першому наближенні.

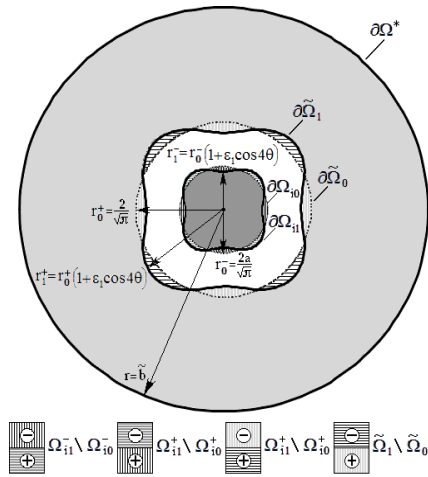


Рисунок 1.8 – Видозміна областей структури при осередненні з урахуванням першого наближення

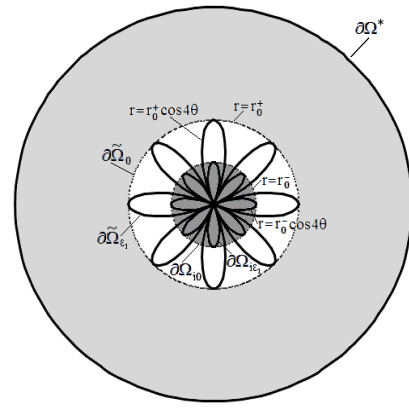


Рисунок 1.9 – Межі структури в нульовому наближенні та перші поправки до них

Вираз ефективного коефіцієнта теплопровідності на основі ТФМ з урахуванням першої поправки за МЗФМ визначається співвідношенням:

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_0 + o(\epsilon_1) = \frac{1 - a^2 + \lambda(1 + a^2)}{1 + a^2 + \lambda(1 - a^2)} + o(\epsilon_1). \quad (1.5)$$

Проведено порівняння виразу (1.5) [36] з відомими чисельними результатами (рис. 1.10) [37] та експериментальними даними (рис. 1.11) [38] інших авторів.

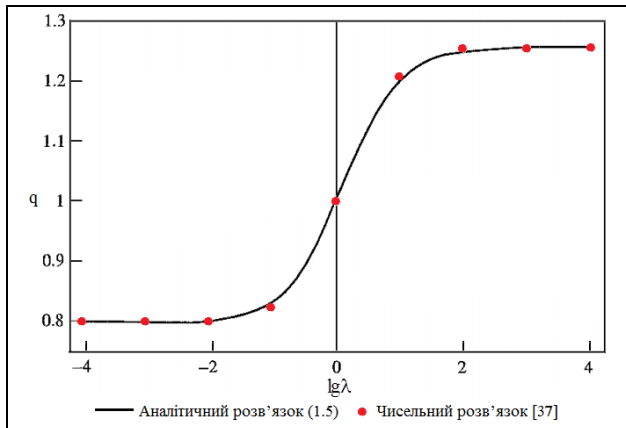


Рисунок 1.10 – Ефективний параметр при для концентрації включень  $c = 1/9$

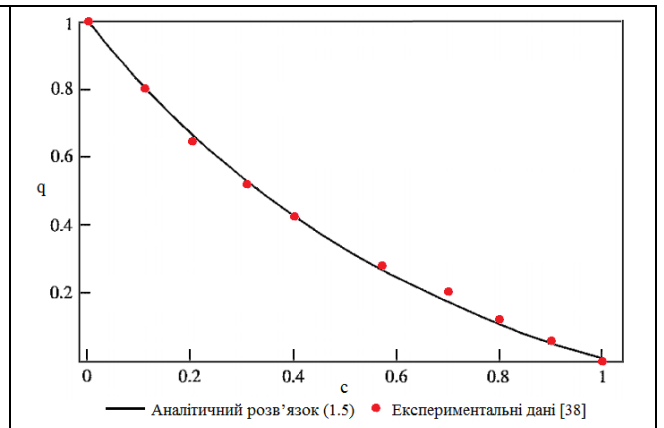


Рисунок 1.11 – Ефективний параметр для непровідних включень

Розв’язок ТФМ (1.5) точно задовольняє теорему Келлера [39] при всіх значеннях провідності вставок  $\lambda$ . Головний член асимптотичного розкладення (1.5) для гранично великих непровідних включень співпадає з відомим співвідношенням, отриманим в [26].



## РОЗДІЛ 2

## АСИМПТОТИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ТРИФАЗНОЇ МОДЕЛІ КОМПОЗИТУ

## 2.1. Використання апарату апроксимацій Паде для розширення області застосування трифазної моделі композиту з круглими включеннями [4]

Співвідношення для граничних випадків провідності включень  $\lambda \rightarrow \infty$  і  $\lambda \rightarrow 0$ , отримані з (1.3), перетворюються за допомогою апроксимацій Паде (АП) [40] за розміром включення  $a$  і визначаються відповідно послідовностями АП  $q_{[0/2]}^{(\infty)}(a)$ ,  $q_{[0/6]}^{(\infty)}(a)$ ,  $\dots$ ,  $q_{[0/18]}^{(\infty)}(a)$  і  $q_{[2/0]}^{(0)}(a)$ ,  $q_{[6/0]}^{(0)}(a)$ ,  $\dots$ ,  $q_{[18/0]}^{(0)}(a)$ .

Рис. 2.1, 2.2 ілюструють графіки послідовностей АП осередненого коефіцієнта відповідно для абсолютно провідних та непровідних включень у порівнянні з розв'язком за ТФМ та асимптотичною формулою [33].

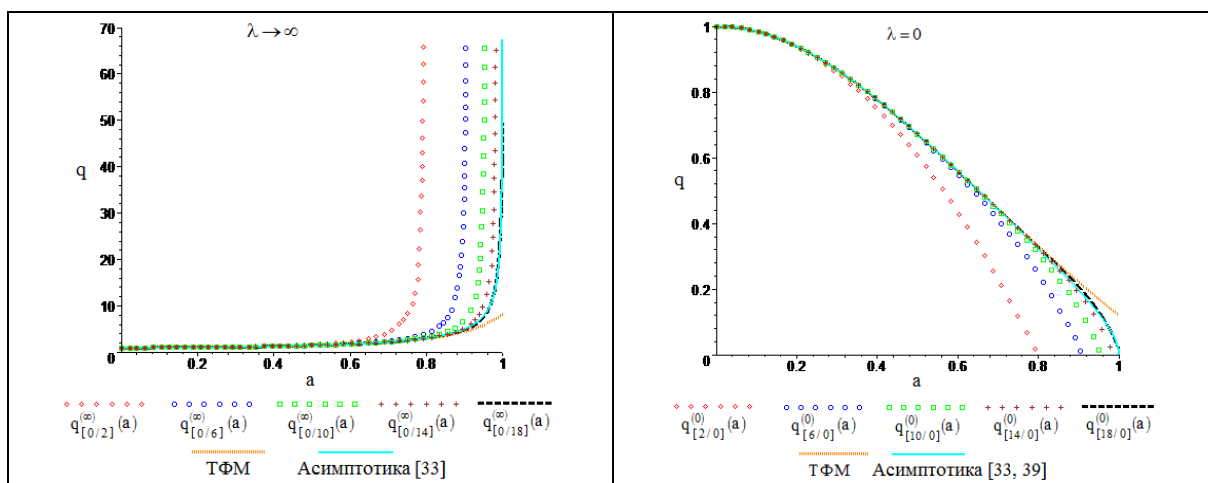


Рисунок 2.1 – Послідовності АП осередненого коефіцієнта для абсолютно провідних включень

Рисунок 2.2 – Послідовності АП осередненого коефіцієнта для непровідних включень

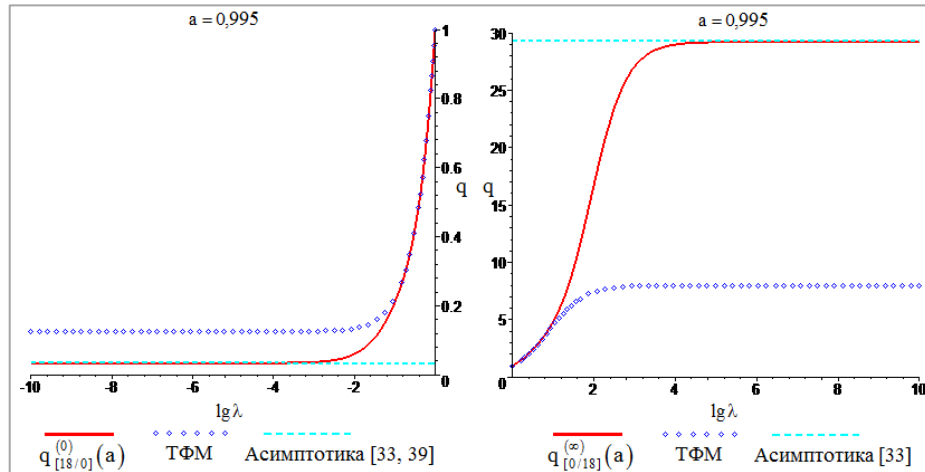
Побудовано АП виразу (1.3) – розв'язку ТФМ у випадку довільної провідності включень  $\lambda$ :

$$q_{[0/18]}(a) = \frac{(\lambda + 1)^9}{\sum_{n=0}^9 (-1)^n 2^{-n} (\pi a^2 / 2)^n (\lambda + 1)^{9-n} (\lambda - 1)^n} \quad \text{при } 1 \leq \lambda < \infty; \quad (2.1)$$

$$q_{[18/0]}(a) = \frac{\sum_{n=0}^9 2^{-n} (\pi a^2 / 2)^n (\lambda + 1)^{9-n} (\lambda - 1)^n}{(\lambda + 1)^9} \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (2.2)$$

які потрапляють у «вилки» Хашина – Штрікмана [41, 42].

На рис. 2.3 представлено графіки ефективного коефіцієнта для включень, розмір яких близький до граничного:  $a = 0,995$ . На рис. 2.4, 2.5 надані графіки ефективних коефіцієнтів АП  $q_{[0/18]}^{(\infty)}(a)$  для ідеально провідних і АП  $q_{[18/0]}^{(0)}(a)$  для непровідних включень порівняно з відповідними асимптотичними розв'язками.



а)  $0 < \lambda \leq 1$

б)  $1 \leq \lambda < \infty$

Рисунок 2.3 – Графіки ефективного коефіцієнта теплопровідності, знайденого за ТФМ, АП та асимптотичним розв'язком [33, 39], для гранично великих включень  $a = 0,995$

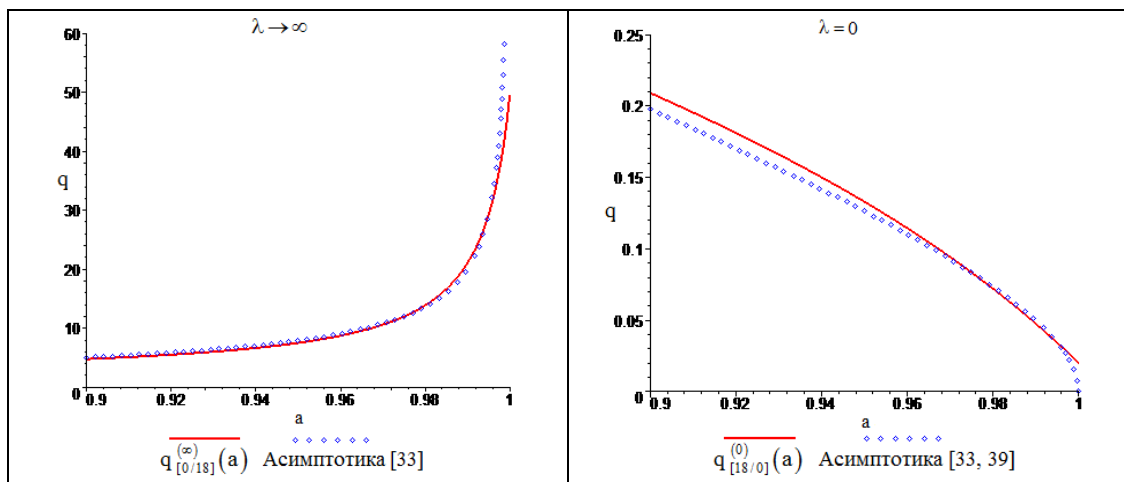


Рисунок 2.4 – АП  $q_{[0/18]}^{(\infty)}(a)$  та асимптотичний розв'язок [33] для абсолютно провідних включень  $\lambda \rightarrow \infty$

Рисунок 2.5 – АП  $q_{[18/0]}^{(0)}(a)$  та асимптотичний розв'язок [33, 39] для непровідних включень  $\lambda = 0$

Проведений аналіз асимптотичних співвідношень та розрахункових даних показав, що отримані розв'язки АП дають якісну картину асимптотики та близькі до асимптотичних кількісні оцінки ефективного параметра при наблизненні

розміру включення  $a$  до 1. В абсолютному вираженні розв'язки АП дають практично прийнятні результати для включень будь-якої провідності  $0 \leq \lambda < \infty$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  при їх розмірах до  $a = 0,996$  включно.

## 2.2. Модифікована трифазна модель композиту [5]

Розроблено модифікований алгоритм трифазної моделі композиту (ТФММ), суть якого полягає в такому: всі, крім однієї, комірки композитної структури замінюються еквівалентним гомогенним середовищем  $\tilde{\Omega}$ , що має невідомий (шуканий) приведений коефіцієнт  $\tilde{\lambda}$ . При цьому квадратний контур комірки вважається колом змінного радіуса (рис. 2.6, 2.7):

$$b = \begin{cases} b(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq 1 & \text{в } \Omega_{i1}^+, \Omega_{i1}^-, \tilde{\Omega}_1 \\ b(\eta) = \sqrt{1 + \eta^2}, & 0 \leq \eta \leq 1 & \text{в } \Omega_{i2}^+, \Omega_{i2}^-, \tilde{\Omega}_2 \end{cases}. \quad (2.3)$$

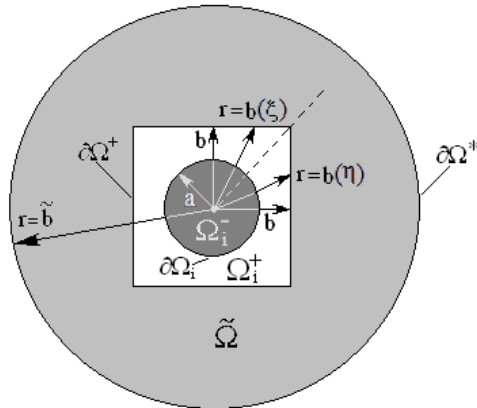


Рисунок 2.6 – Перетворення квадратного контуру комірки в ТФММ

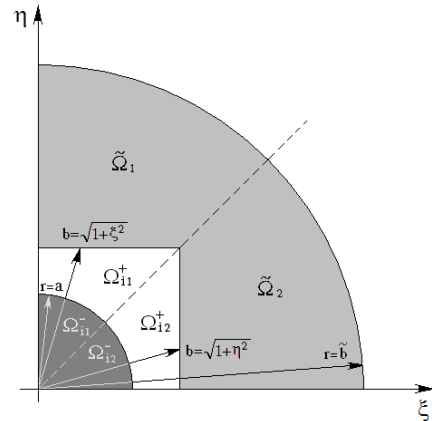


Рисунок 2.7 – Апроксимація трифазної області в ТФММ

Тоді приведений параметр  $\tilde{\lambda}$  визначається з трансцендентного рівняння:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1 + \left(\frac{1}{\Delta} - \Delta\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta} + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{a^2}{\Delta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta}}{1 + \left(\frac{1}{\Delta} - \Delta\right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta} - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{a^2}{\Delta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta}}, \quad \text{де } \Delta = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\lambda} - 1}{\tilde{\lambda} + 1} \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} a^2}. \quad (2.4)$$

Вираз приведенного параметра за ТФММ, отриманий з трансцендентного рівняння (2.4), задовольняє теорему Келлера [39]:  $\tilde{\lambda}(\lambda) = \tilde{\lambda}^{-1}(\lambda^{-1})$ .

Співвідношення  $\Delta(\tilde{\lambda}, \lambda)$  в (2.4) можна трактувати як природний малий параметр:  $0 \leq \Delta(\tilde{\lambda}, \lambda) \leq 1$  при будь-яких значеннях  $0 \leq \lambda < \infty$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  і  $0 \leq a \leq 1$ .

Аналіз розв'язку ТФММ (2.4) дав можливість отримати такі асимптотики:

1) Для абсолютно провідних включень  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\tilde{\lambda} = 1 + \frac{\pi a^2}{2} - \frac{1}{\lambda} \pi a^2 \text{ при } a \rightarrow 0; \quad \tilde{\lambda} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \text{ при } a \rightarrow 1. \quad (2.5)$$

2) Для композита з включеннями великого розміру  $a \rightarrow 1$  та будь-якою провідністю  $0 \leq \lambda < \infty$  трансцендентне рівняння (2.4) вироджується у співвідношення для визначення  $\tilde{\lambda}$ , в якому вираз  $\Delta$  набуває вигляду:

$\Delta = \sqrt{1 - (\lambda - 1)^2 / ((\lambda + 1)^2 a^2)}$ . Отже, отримуємо такі асимптотичні формули:

$$\tilde{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2}} - 1 \text{ при } \lambda \gg 1; \quad \tilde{\lambda} = 1 + \frac{\pi(\lambda - 1)}{4} \text{ при } \lambda \sim 1; \quad \tilde{\lambda} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi} + \frac{2\lambda}{\pi^2} \text{ при } \lambda \ll 1. \quad (2.6)$$

Графіки на рис. 2.8 ілюструють ефективний коефіцієнт теплопровідності в залежності від провідності включень  $\lambda$  гранично великого розміру  $a \rightarrow 1$ . Для порівняння наведено графіки асимптотик  $q_{\text{асимпт}}^{(\infty)}$  [33] і  $q_{\text{асимпт}}^{(0)}$  [33, 39] та межі Хашина – Штрікмана [41, 42].

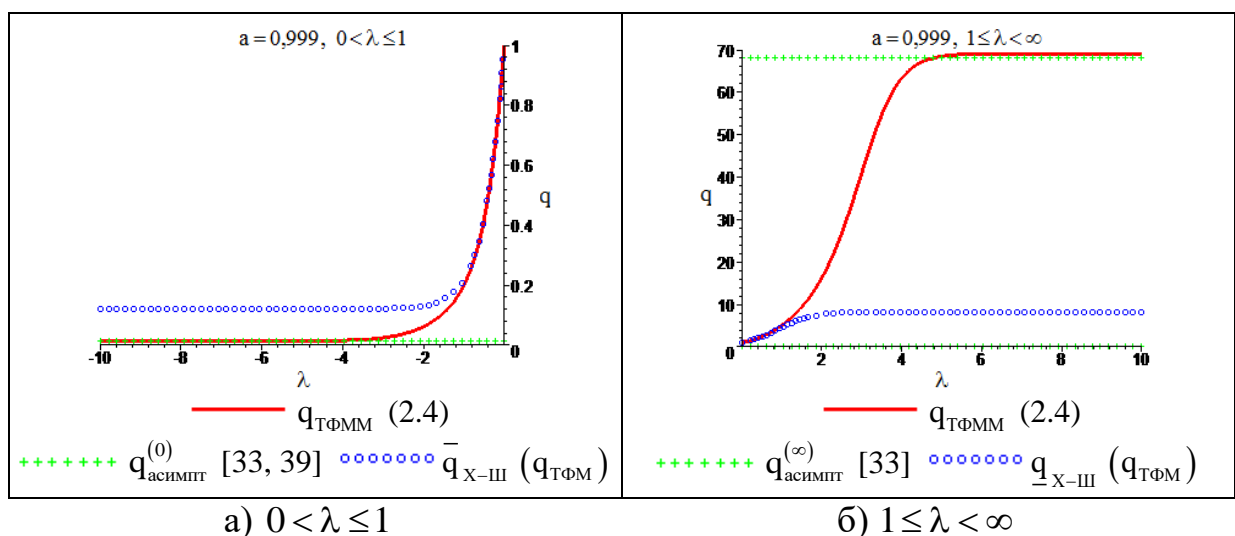


Рисунок 2.8 – Графіки осередненого коефіцієнта теплопровідності при  $a = 0,999$

У табл. 2.1, 2.2 проведено порівняння результатів розрахунків ефективного коефіцієнта, знайденого за ТФММ, з відомими даними інших авторів.

Таблиця 2.1 – Результати розрахунків різними методами ефективного коефіцієнта теплопровідності для абсолютно провідних включень

Концентрація включень $c$ Розмір включень $a$	Формула (3.12) [34]	Формула (3.13) [34]	Чисельні результати [32]	Асимптотика [33]	ТФММ
0,7 0,9441	7,409	7,769	7,433	7,3857	7,7695
0,74 0,9707	10,91	11,46	11,01	10,9254	11,4624
0,77 0,9901	20,18	21,04	20,43	20,2952	21,0488
0,78 0,9966	35,01	36,60	35,93	35,7525	36,6519

Таблиця 2.2 – Результати розрахунків ефективного коефіцієнта для гранично великих розмірів  $a \rightarrow 1$  абсолютно провідних включень

Параметр $1/\sqrt{1-a^2}$ Розмір включень $a$	Чисельний розрахунок [33]	Асимптотика [33]	ТФММ
10 0,9949874370	29,4440	29,2743	30,1283
50 0,9997999801	155,1894	154,9380	156,0179
100 0,9999499986	312,6460	312,0177	313,1276
1000 0,9999995001	3142,5927	3142,5927	3140,9037

Таким чином, ТФММ працює та дає достовірні результати практично у всьому діапазоні зміни обох параметрів композиту: геометричного – розміру включень  $0 < a < 1$  та фізичного – провідності включень  $0 < \lambda < \infty$ , включаючи граничні випадки  $a \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 1$ ;  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Головний член асимптотичного розкладення ефективного параметра в (2.5) для щільно упакованих абсолютно провідних включень співпадає з асимптотикою, наведеною в статті [33].

Розв'язок за ТФММ для непровідних включень малих розмірів, співпадає з точністю до членів порядку  $a^2$  включно зі співвідношенням, наведеним у роботі [36].

## РОЗДІЛ 3

### АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ВИСОКОПРОВІДНИХ ЩІЛЬНО УПАКОВАНИХ КОМПОЗИТІВ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ ЗМАЗКИ

#### 3.1. Асимптотичні співвідношення теорії змазки для волокнистих композитів із включеннями квадратного профілю [3]

Суть наближення теорії змазки (ТЗМ) [27] полягає в заміні крайової задачі у початковій характерній структурній області композиту задачею в області з більш простою геометрією. Далі величина «змазаного» геометричного параметра вважається функцією координат, і всі необхідні аналітичні співвідношення будуються з урахуванням цієї залежності у вихідній області структури.

Заснований на ТЗМ підхід у силу свого фізичного сенсу застосовується для асимптотичного дослідження композитів із включеннями великих розмірів великої провідності.

Після розв'язку локальної задачі та виконання процедури осереднення [25] вираз приведенного параметра  $q_{\text{ТЗМ}}$  визначається у вигляді:

$$q_{\text{ТЗМ}} = \frac{\lambda(1 - a^2 + a^3) + a^2(1 - a)}{\lambda(1 - a) + a}. \quad (3.1)$$

У граничному випадку  $\lambda = 0$  розв'язок ТЗМ співпадає з асимптотичним розв'язком задачі механіки для стрижневої системи [26].

Асимптотичні вирази приведенного параметра в граничних випадках провідності включень та їх розмірів співпадають з наближеннями ТФМ.

В роботі [43] для приведенного параметра волокнистого композиту з квадратними включеннями були знайдені двосторонні оцінки  $\tilde{q}$ ,  $\underline{q}$  з досить вузькою «вилкою». Вираз  $q_{\text{ТЗМ}}$  при всіх значеннях  $a \gg 0$  і  $\lambda \gg 1$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  потрапляє в ці межі, тобто  $\underline{q} \leq q_{\text{ТЗМ}} \leq \tilde{q}$  (рис. 3.1, 3.2).

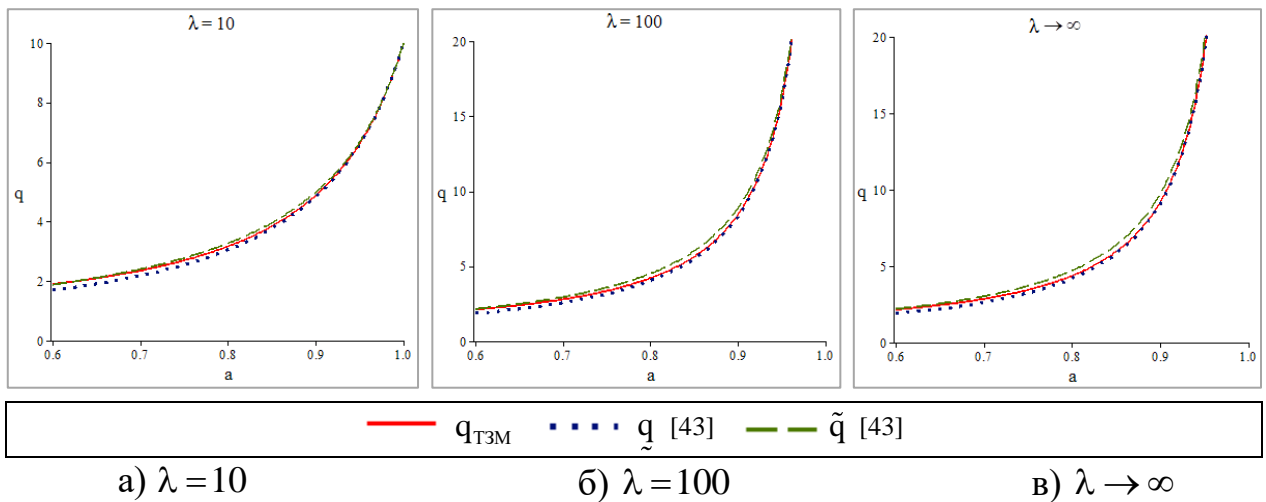


Рисунок 3.1 – Графіки в залежності від розміру включень  $a$  ефективного коефіцієнта теплопровідності  $q_{ТЗМ}$  та його двосторонні оцінки  $\tilde{q}$ ,  $q$

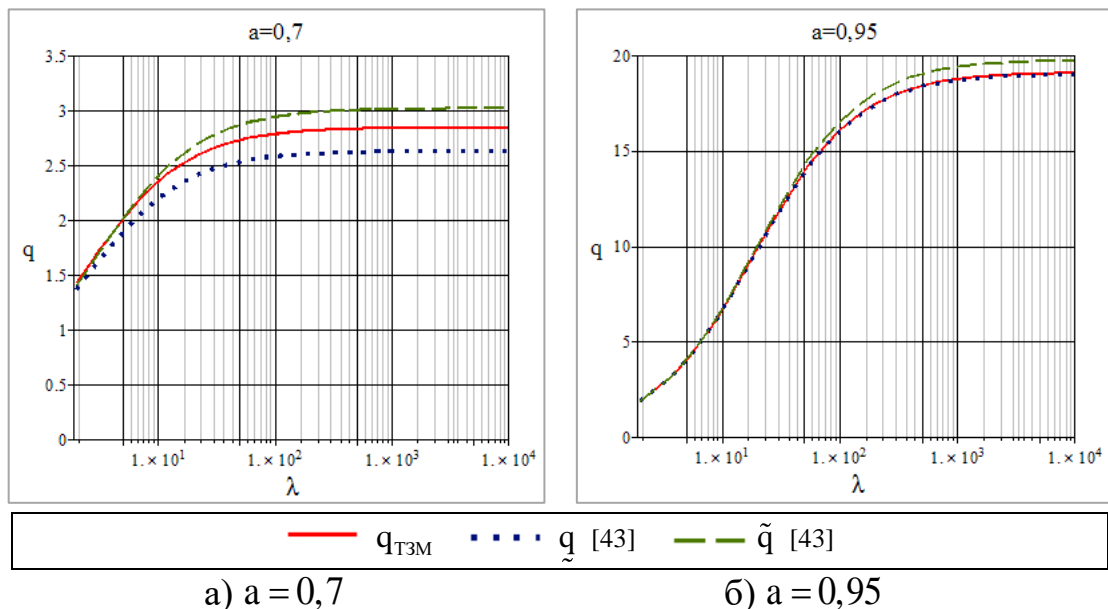


Рисунок 3.2 – Графіки залежно від провідності включень  $\lambda$  ефективного коефіцієнта теплопровідності  $q_{ТЗМ}$  та його двосторонні оцінки  $\tilde{q}$ ,  $q$

### 3.2. Застосування теорії змазки при розв'язання локальної задачі для композитів із круглими циліндричними включеннями [9]

Вважаємо розмір включення  $a$  змінною функцією координати  $\xi$  (рис. 3.3):  $a(\xi) = \sqrt{a^2 - \xi^2}$ ; при осередненні в розв'язку локальної задачі константи вважаються функціями змінної  $\xi$ .

Вираз приведеного коефіцієнта теплопровідності  $q$  композиту з круглими циліндричними включеннями (за умови  $\lambda > a/(1+a)$ ) має вигляд:

$$q = 1 - a + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left( \frac{2\lambda \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda(1+a) - a}{\lambda(1-a) + a}}}{\sqrt{(\lambda(1+a) - a)(\lambda(1-a) + a)}} - \frac{\pi}{2} \right) \text{ при } \lambda > \frac{a}{1+a}, 0 << a < 1. \quad (3.2)$$

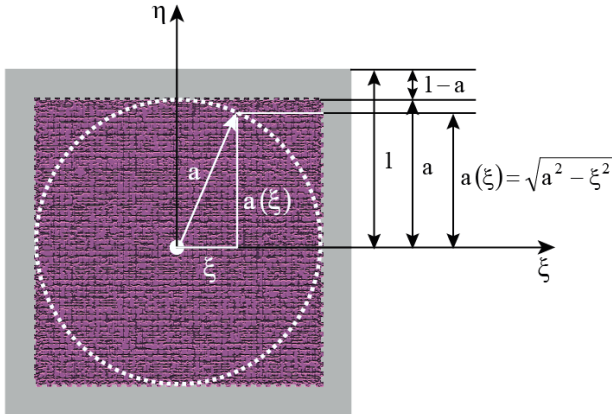


Рисунок 3.3 – Апроксимація круглого контуру включення

З виразу (3.2) отримуємо такі асимптотичні розкладення:

– для абсолютно провідних включень великих геометричних розмірів, близьких до граничного:

$$q = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{\pi}{2} - 1 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, a \rightarrow 1; \quad (3.3)$$

– для включень гранично великих геометричних розмірів та великої провідності:

$$q_{\text{кр.}}^{(\infty)} = \pi\sqrt{\lambda/2} - \pi/2 - 1 \text{ при } a = 1, \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

З використанням теореми Келлера [39] маємо вирази приведенного коефіцієнта композиту з включеннями низької провідності:

– непровідні включення великих розмірів, близьких до граничного:

$$q = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\pi - (\pi/2 + 1)\sqrt{1-a^2}} \text{ при } \lambda = 0, a \rightarrow 1; \quad (3.5)$$

– низькопровідні включення гранично великих геометричних розмірів:

$$q_{\text{кр.}}^{(0)} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi - (\pi/\sqrt{2} + \sqrt{2})\sqrt{\lambda}} \text{ при } a = 1, \lambda \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Отриманий на основі ТЗМ вираз осередненого коефіцієнта для круглих



циліндричних включень добре описує стан ефективного гомогенного середовища при близьких до гранично великих значеннях геометричного і фізичного параметрів структури. Це підтверджується збігом головного члена асимптотичного виразу (3.3) з відомим асимптотичним розв'язком [33].

### 3.3. Модель теорії змазки для композитів із криволінійними ромбічними включеннями [10]

Розмір включення  $a$  як змінна функція координати  $\xi$  описується в даному випадку таким чином (рис. 3.4):

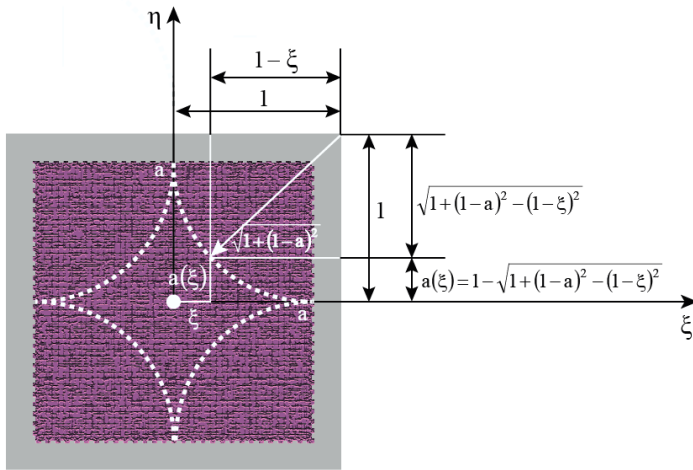


Рисунок 3.4 – Апроксимація криволінійного ромбічного включення в моделі ТЗМ

$$a(\xi) = 1 - \sqrt{1 + (1-a)^2 - (1-\xi)^2}. \quad (3.7)$$

Шуканий вираз  
приведеного коефіцієнта  
теплопровідності при  $0 \ll a < 1$ ,  
 $\lambda \gg 1$  ( $\lambda > 1 + 1/\sqrt{1 + (1-a)^2}$ )  
визначається у вигляді:

$$q = 1 - a + \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 - 1}} \ln \frac{\sqrt{\Delta_1 - 1} + \sqrt{\Delta_1 - 1}}{\sqrt{\Delta_1 - 1} - \sqrt{\Delta_1 + 1}} \right), \text{ де } \Delta_1 = (\lambda - 1)^2 (1 + (1-a)^2). \quad (3.8)$$

В окремих випадках із (3.8) мають місце такі асимптотичні співвідношення:

$$q = \pi/2 + 1 - a \text{ при } \lambda \rightarrow \infty, a \rightarrow 1; \quad (3.9)$$

$$q_{\text{кр. ромб.}}^{(\infty)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2\lambda}{\lambda} \text{ при } a = 1, \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

Для композитів з криволінійними ромбічними включеннями великих розмірів  $0 \ll a < 1$  та низької провідності  $\lambda \ll 1$  ( $\lambda < 1 - (1 + \sqrt{1 + (1-a)^2})^{-1}$ )

асимптотичний вираз ефективного коефіцієнта може бути записаний з використанням співвідношення (3.8) та теореми Келлера [39]:

$$q = \frac{(1-\lambda)\sqrt{\Delta_2-1}}{\left((1-a)(1-\lambda) + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\Delta_2-1} - \ln \frac{\sqrt{\Delta_2-1} + \sqrt{\Delta_2-1}}{\sqrt{\Delta_2-1} - \sqrt{\Delta_2+1}}} \text{ при } \lambda \ll 1, 0 \ll a < 1, \quad (3.11)$$

де  $\Delta_2 = (1 - \lambda/\lambda)^2 (1 + (1-a)^2)$ .

Зокрема, для включень гранично великих геометричних розмірів та низької провідності отримуємо:

$$q_{\text{кр. ромб.}}^{(0)} = \frac{2}{\pi - 2\lambda \ln(2\lambda^{-1})} \text{ при } a = 1, \lambda \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

### 3.4. Розрахункова модель розв'язку задачі на комірці методом теорії змазки для гексагональної решітки [6]

В рамках ТЗМ замінюємо зовнішній шестикутний контур комірки колом радіусу  $b$  (рис. 3.5) і далі вважатимемо його колом змінного радіусу (рис. 3.6):

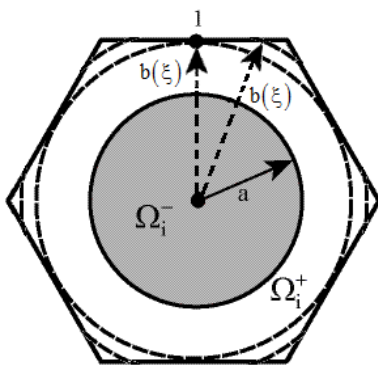


Рисунок 3.5 – Розрахункова модель ТЗМ для гексагональної решітки

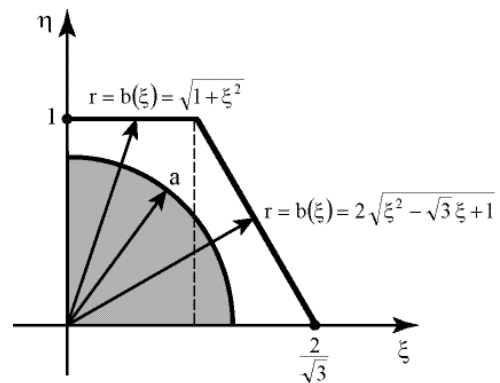


Рисунок 3.6 – Апроксимація 1/4 частини шестикутного контуру комірки

$$b = \begin{cases} b(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2} & \text{при } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b(\xi) = 2\sqrt{\xi^2 - \sqrt{3}\xi + 1} & \text{при } \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \xi \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}. \quad (3.13)$$

Тоді маємо асимптотичний вираз приведенного параметра при  $\lambda \gg 1$ ,  $a \gg 0$  у вигляді:

$$q = \frac{2\sqrt{3}\gamma a^2}{\sqrt{1-\gamma a^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-\gamma a^2}} + 1 + \frac{\gamma a^2 \sqrt{3}}{3} \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\gamma a}} + \frac{4}{\sqrt{1-\gamma a^2}} \left[ \operatorname{arctg} \left( \left( \sqrt{3}\gamma a - \sqrt{3\gamma a^2 - 1} \right) \frac{\sqrt{1-\sqrt{\gamma a}}}{\sqrt{1+\sqrt{\gamma a}}} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2\left(\sqrt{3}\gamma a - 1 - \sqrt{3\gamma a^2 - 1}\right)\sqrt{1-\gamma a^2}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}\gamma a)\sqrt{\gamma a} + \sqrt{3\gamma a^2 - 1}(\sqrt{\gamma a} - 2 + \sqrt{3}\gamma a) + 2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \left( 2\sqrt{\frac{1}{\gamma a^2} - 1} \right) \right] - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{(2+3\gamma a^2 + 2\sqrt{3(3\gamma a^2 - 1)})}{(4-3\gamma a^2)} \right\}, \text{ де } \gamma = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}. \quad (3.14)$$

У граничному випадку  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 1$  з (3.14) отримуємо з урахуванням головного члена асимптотики і першої поправки до нього порядку  $(1-a^2)^0$  асимптотичне розкладення:

$$q_{\text{асимпт}}^{(\infty)} = \frac{\sqrt{3}\pi}{\sqrt{1-a^2}} + 1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \ln(5+2\sqrt{6}) - \sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}), \quad (3.15)$$

головний член якого співпадає з асимптотичною формулою, отриманою в роботі [44].

Проведено порівняння значень ефективного параметра, обчисленого за формулами (3.14), (3.15), з відомими результатами інших авторів (рис. 3.7, 3.8).

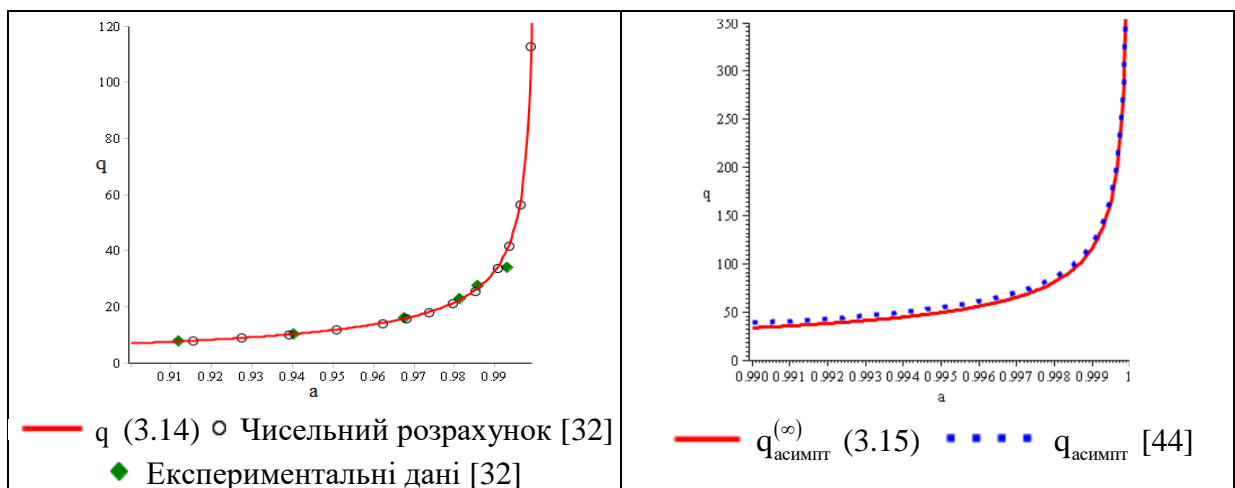


Рисунок 3.7 – Ефективний параметр композиту при  $a \gg 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$

Рисунок 3.8 – Ефективний параметр композиту при  $a \rightarrow 1$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$

Чисельні результати порівняння ефективного параметра, обчисленого за ТЗМ, із даними інших авторів показують високу точність апроксимації моделі.

### 3.5. Двосторонні оцінки асимптотики ефективного параметра для композита гексагональної структури [6]

Проведено узагальнення підходу ТЗМ та отримано вираз ефективного параметра у разі ідеально провідних включень середніх розмірів  $a \leq 1/\sqrt{3}$ :

$$q_{\text{с.вкл.}} = 1 - \frac{\sqrt{3} \pi a^2}{6} + \frac{\sqrt{3} a^2}{3\sqrt{1-a^2}} \left( 3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \right). \quad (3.16)$$

Звичайно, розв'язок для середніх включень (3.16) не працює у разі їх великих розмірів і не дає асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 1$  [44]. Тому перетворимо співвідношення (3.16), використовуючи Паде-апроксимації. Представимо

$$q_{\text{с.вкл.}} = 1 - \frac{\sqrt{3} \pi a^2}{6} + \frac{2\sqrt{3} a^2}{\sqrt{1-a^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) + q^*, \quad (3.17)$$

$$\text{де } q^* = \frac{\sqrt{3} a^2}{\sqrt{1-a^2}} \left( \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} \right),$$

і побудуємо послідовність АП  $q_{[2/2]}^*$ ,  $q_{[2/4]}^*$ , ...,  $q_{[2/10]}^*$  для виразу  $q^*$ . Подальше збільшення порядку АП є недоцільним, оскільки, починаючи з  $q_{[2/12]}^*$ , послідовність АП розходиться. Це означає, що АП  $q_{[2/2]}^*$ ,  $q_{[2/4]}^*$ , ...,  $q_{[2/2N]}^*$ , ... можна трактувати як асимптотичний ряд, збереження в якому оптимального числа членів забезпечує близький до точного розв'язок задачі.

Співвідношення для ефективного параметра

$$q_{\text{Паде}} = 1 - \frac{\sqrt{3} \pi a^2}{6} + \frac{2\sqrt{3} a^2}{\sqrt{1-a^2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) + q_{[2/10]}^* \quad (3.18)$$

показує коректні результати для будь-яких розмірів  $0 \leq a < 1$  абсолютно провідних включень і при  $a \rightarrow 1$  дає головний член асимптотики, який співпадає з відомим результатом, отриманим в [44]:  $q_{\text{Паде}} = \sqrt{3}\pi / \sqrt{1-a^2} - 6,9345$ .

Для порівняння: найкращий, на думку авторів [45], результат (формула (47)) отримано у вигляді:  $q = \sqrt{3}\pi / \sqrt{1-a^2} - 6,2371$ .

На рис. 3.9 показано послідовність АП  $q_{[2/2]}^*, q_{[2/4]}^*, \dots, q_{[2/10]}^*$ . На рис. 3.10 наведені графіки для абсолютно провідних включень порівняно з результатами обчислення  $q_{\text{аб. пр.}}$  за формулою (44) [45].

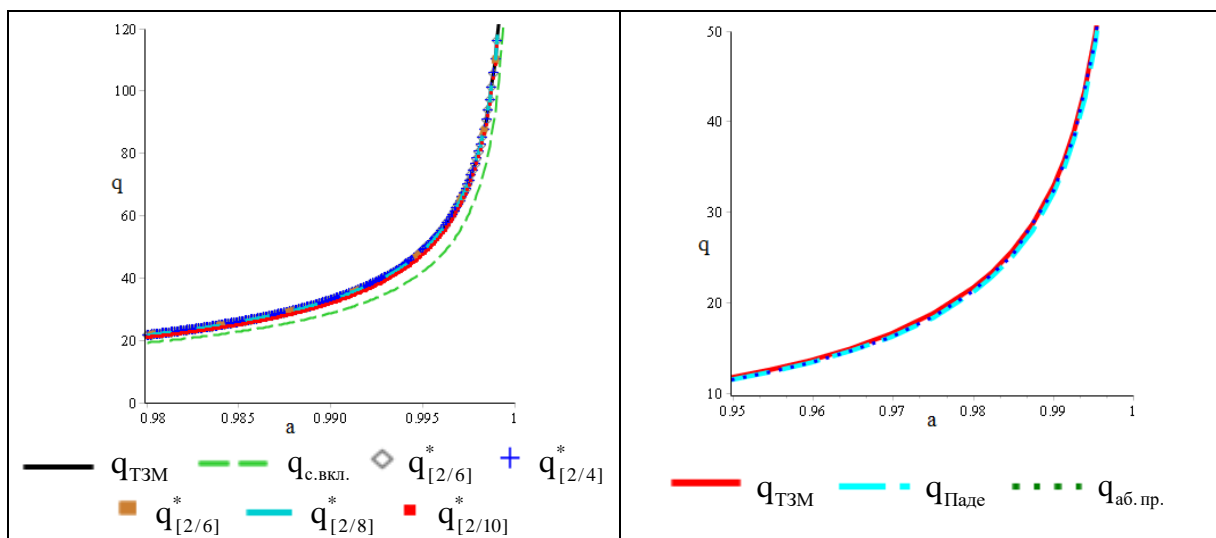


Рисунок 3.9 – Графіки приведенного параметра при  $0,98 \leq a < 1$ , що описуються послідовністю АП

Рисунок 3.10 – Графіки приведенного параметра при  $0,95 \leq a < 1$  для абсолютно провідних включень

Розв'язки за ТЗМ (3.14) та з використанням АП (3.18) дають у разі абсолютної провідності включень відповідно верхню та нижню оцінки асимптотики приведенного параметра, і «вилка» між ними не перевищує 3% при будь-яких значеннях розміру включень  $0 \leq a < 1$ ,  $a \rightarrow 1$  (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Двосторонні оцінки асимптотики приведенного параметра

Розмір включення $a$	$q_{\text{Паде}}$ (3.18)	$q_{\text{аб. пр.}}$ [45]	$q_{\text{ТЗМ}}$ (3.14)	$\frac{q_{\text{аб. пр.}} - q_{\text{Паде}}}{q_{\text{аб. пр.}}} \times 100\%$	$\frac{q_{\text{ТЗМ}} - q_{\text{аб. пр.}}}{q_{\text{аб. пр.}}} \times 100\%$
0,92	8,0984	8,0996	8,2340	0,0151	1,6596
0,95	11,4224	11,4728	11,6929	0,4392	1,9179
0,99	31,9262	32,4000	32,9428	1,4624	1,6752
0,999	114,6774	115,5922	116,3830	0,7914	0,6841
0,9995	165,0648	166,0394	166,8318	0,5870	0,4772
0,99995	537,1656	538,5097	538,9913	0,2496	0,0894

### 3.6. Власні коливання мембрани з гексагональним масивом круглих включень [7]

Розглядається задача про власні коливання жорстко зацемленої по контуру прямокутної мембрани, яка є композитною структурою з періодичними круглими включеннями, що становлять гексагональну решітку.

Розв'язок задачі подається у вигляді асимптотичних рядів за ступенями безрозмірного малого параметра  $\varepsilon$ , що характеризує період структури [25].

На першому етапі визначається розв'язок локальної задачі. Другий етап – знаходження головних частин власних функцій і частот коливань із осередненої задачі. На третьому етапі визначається перша поправка частоти  $\varpi_1$ .

Осереднена задача другого наближення представляється рівнянням:

$$q \Delta u_{10} + \bar{q}(\varpi_0 u_{10} + \varpi_1 u_0) = 0 \text{ в } \Omega^*; \quad u_{10} = -\tilde{u}_1 \text{ на } \partial\Omega, \quad (3.19)$$

де  $q$  – осереднений параметр, що визначається розв'язком задачі на комірці;  $\bar{q} = 1 - (1 - \lambda)\pi a^2 / 2\sqrt{3}$  – осереднений за Фойгтом параметр;  $\tilde{u}_1$  – осереднена частина функцій  $u_1^\pm(x, y, \xi, \eta)$  на межі мембрани.

Так, для ребра  $(0, y)$  отримуємо:  $\tilde{u}_1 = \frac{1}{\ell_2} \int_0^{\ell_2} u_1^\pm(0, y, \xi_0, \eta) d\eta$ , де  $\xi_0$  – величина  $\xi$  на межі мембрани  $x = 0$ .

Для визначення  $\varpi_1$  приходимо до співвідношення виду:

$$\varpi_1 \bar{q} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} u_0^2 dx dy - q \left( \int_0^{\ell_2} \frac{\partial u_0}{\partial x} u_{10} \Big|_{x=0}^{x=\ell_1} dy - \int_0^{\ell_1} \frac{\partial u_0}{\partial y} u_{10} \Big|_{y=0}^{y=\ell_2} dx \right) = 0. \quad (3.20)$$

Тоді якщо  $u_{10} = -\tilde{u}_1 = 0$  на  $\partial\Omega$ , то  $\varpi_1 = 0$ , і розкладання власних частот коливань починається з  $\varpi_2$  – члена порядку  $\varepsilon^2$ :  $\varpi = \varpi_0 + O(\varepsilon^2) + \dots$

Якщо  $u_{10}$  не задовольняє граничним умовам на зовнішньому контурі мембрани, тобто  $u_{10} \neq 0$  на  $\partial\Omega$ , то отримаємо ненульову першу поправку власної

частоти  $\varpi = \varpi_0 + \varepsilon \varpi_1 + \dots$ , яка в силу (3.20) визначиться у вигляді:

$$\varpi_1 = \frac{q \left( \int_0^{\ell_2} \phi(y) dy + \int_0^{\ell_1} \varphi(x) dx \right)}{\bar{q} \int_0^{\ell_1} \int_0^{\ell_2} u_0^2 dx dy}, \text{ де } \phi(y) = \frac{\partial u_0}{\partial x} u_{10} \Big|_{x=0}^{x=\ell_1}, \varphi(x) = \frac{\partial u_0}{\partial y} u_{10} \Big|_{y=0}^{y=\ell_2}. \quad (3.21)$$

### 3.7. Нестационарний теплообмін у композитній мембрані з круглими включеннями гексагональної структури [8]

Розглядається задача про нестационарний теплообмін у композитному матеріалі гексагональної структури з періодично розподіленими включеннями круглого перерізу. Передбачається, що теплопровідність у матриці та включеннях може бути описана за законом Фур'є. Вихідна задача математично формулюється як задача з крайовими та початковими умовами:

$$K^{\pm} \left( \frac{\partial^2 T^{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{\pm}}{\partial y^2} \right) = c^{\pm} \rho^{\pm} \frac{\partial T^{\pm}}{\partial t} \text{ в } \Omega_i^{\pm}; \quad (3.22)$$

$$T^+ = T^- \text{ на } \partial\Omega_i^-; \quad K^+ \frac{\partial T^+}{\partial \mathbf{n}} = K^- \frac{\partial T^-}{\partial \mathbf{n}} \text{ на } \partial\Omega_i; \quad T^{\pm} = f^{\pm}(x, y) \text{ при } t = 0, \quad (3.23)$$

де  $T$  – температура;  $\rho$  – щільність;  $k$  – коефіцієнт теплопровідності;  $c$  – питома теплоємність;  $K^{\pm} = k^{\pm} / (c^{\pm} \rho^{\pm} \ell^2)$ ;  $2\ell$  – характерний розмір комірки.

Використовуючи перетворення Лапласа  $T^{\pm}(x, y, p) = \int_0^{\infty} T^{\pm}(x, y, t) \exp(-pt) dt$ ,

асимптотичний метод гомогенізації [25, 26] та у припущенні, що диференціювання за часом не змінює порядок вихідних функцій, тобто  $\partial T^{\pm}(x, y, \tau^{\pm}) / \partial \tau^{\pm} \sim T^{\pm}(x, y, \tau^{\pm})$ ,  $\tau^{\pm} = K^{\pm} t / c^{\pm} \rho^{\pm}$ , отримуємо осереднене рівняння

$$K^0 \Delta T_0 + \frac{1}{|\Omega_i|} \left[ K^+ \iint_{\Omega_i^+} \left( \frac{\partial^2 T_1^+}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 T_1^+}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta + K^- \iint_{\Omega_i^-} \left( \frac{\partial^2 T_1^-}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 T_1^-}{\partial y \partial \eta} \right) d\xi d\eta \right] = p T_0 - \tilde{f}, \quad (3.24)$$

$$\text{де } \tilde{f} = \frac{1}{|\Omega_i|} \left[ \iint_{\Omega_i^+} f^+(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta + \iint_{\Omega_i^-} f^-(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta \right]; \quad K^0 = \frac{K^+ |\Omega_i^+| + K^- |\Omega_i^-|}{|\Omega_i|},$$

з початковою умовою в загальному вигляді:  $T_0(x, y, p) = \tilde{f}$  при  $t = 0$ .

При розв'язку локальної задачі за ТЗМ гексагональна форма комірки була апроксимована функцією змінної координати. Для ідеально провідного щільно упакованого композиту ефективний параметр описується співвідношенням:

$$\begin{aligned} q = 1 + \frac{4\sqrt{3}a^2}{3\sqrt{1-a^2}} & \left[ \frac{3}{2} \arctan \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{1-a^2}} + \arctan \left( \left( \sqrt{3}a - \sqrt{3a^2-1} \right) \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \arctan \frac{2\left(\sqrt{3}a - 1 - \sqrt{3a^2-1}\right)\sqrt{1-a^2}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}a)a + \sqrt{3a^2-1}(a-2+\sqrt{3}a)+2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{8} \arctan \frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} \right] + \frac{a^2}{4} \left( \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - 2\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3a} - \ln \frac{(2+3a^2+2\sqrt{3(3a^2-1)})}{(4-3a^2)} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Результати порівняння (рис. 3.11) ефективного параметра з відомими чисельним  $q_{\text{чис}}$  [32] та асимптотичним  $q_{\text{ас}}$  [44] розв'язками підтверджують високу точність отриманого результату.

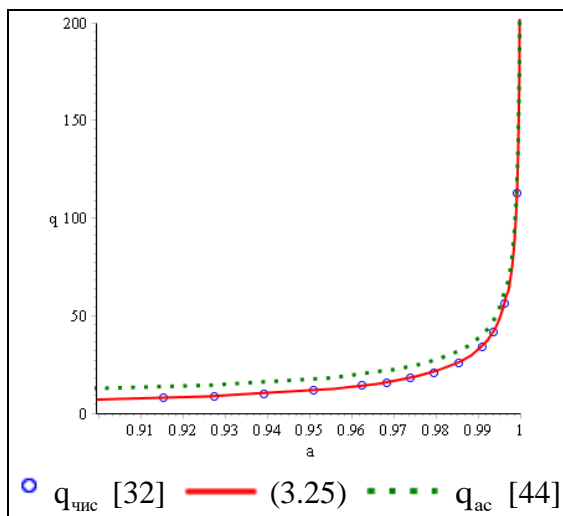


Рисунок 3.11 – Ефективний параметр висококонтрастного ( $K^-/K^+ \rightarrow \infty$ ) щільно упакованого ( $a \rightarrow 1$ ) волокнистого композиту

Як приклад досліджено випадок охолодження прямокутної композитної області за законом охолодження Ньютона:  $T^\pm = T_c^\pm e^{-\gamma t}$ .

Оскільки розв'язок періодичної задачі має специфічні екстремальні властивості, отриманий розв'язок періодичної задачі може бути використаний для оцінки ефективних властивостей композитів із випадковою структурою [46].



**РОЗДІЛ 4**  
**ПРИКЛАДАННЯ АПАРАТУ АСИМПТОТИЧНО ЕКВІВАЛЕНТНИХ**  
**ФУНКЦІЙ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНИХ СТАНІВ**  
**КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР**

**4.1. Визначення ефективного коефіцієнта теплопровідності композиту з квадратними включеннями шляхом зрощування асимптотичних розкладень [11]**

Розв'язок задачі проводився у три етапи:

1) Зрощування за розміром включень  $a$  при їх фіксованій провідності  $\lambda \gg 1$  асимптотичного розкладення  $q_{ТЗМ}$  (3.1) при  $a \gg 0$  та  $q_{ДФМ}$  – за двофазною моделлю композиту [12], побудованою при малих геометричних розмірах включень  $a \ll 1$ . За параметр зрощування  $\varepsilon_a$  прийнято величину:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a = & \frac{a^2}{2}(1+a) + \frac{5a^2}{2}(1-a) - 3a^2(1-a)^2 + 12a^3(1-a)^2 - 16a^3(1-a)^3 - 6a^4(1-a)^2 + \\ & + 20a^4(1-a)^3 + 35a^4(1-a)^4 + 56a^5(1-a)^5 - 70a^4(1-a)^6 + 70a^5(1-a)^6 + \quad (4.1) \\ & + 140a^6(1-a)^6 - 322a^5(1-a)^7 - 924a^6(1-a)^7 + 1716a^7(1-a)^7 - 3432a^7(1-a)^8 + \\ & + 6435a^8(1-a)^8 - 12870a^8(1-a)^9 + 24310a^9(1-a)^9 - 48620a^9(1-a)^{10} + 92378a^{10}(1-a)^{10}. \end{aligned}$$

Вираз параметра  $\varepsilon_a$  виходить з умов, що розкладення в ряд співвідношення  $q^{(\infty)} = (1 - \varepsilon_a)q_{ДФМ}^{(\infty)} + \varepsilon_a q_{ТЗМ}^{(\infty)}$  співпадає з розкладенням при  $a \rightarrow 0$  виразу  $q_{ДФМ}^{(\infty)} \equiv q_{ДФМ}$  з точністю до членів порядку  $a^{10}$  включно і з розкладенням  $q_{ТЗМ}^{(\infty)} \equiv q_{ТЗМ}$  (3.1) в ряд при  $a \rightarrow 1$  з точністю до членів порядку  $(1-a)^{10}$  включно.

2) Апроксимація отриманого при  $\lambda \gg 1$  виразу осередненого параметра  $q^{(\infty)}$  на випадок  $0 < \lambda \ll 1$ :  $q^{(0)} = (1 - \varepsilon_a)q_{ДФМ}^{(0)} + \varepsilon_a q_{ТЗМ}^{(0)}$ , де  $q^{(0)}$  також співпадає з розкладеннями у ряди виразів  $q_{ДФМ}^{(0)}$  при  $a \rightarrow 0$  і  $q_{ТЗМ}^{(0)}$  при  $a \rightarrow 1$  з точністю до членів відповідно порядку  $a^{10}$  і  $(1-a)^{10}$  включно.

3) Зрощування знайдених асимптотичних співвідношень  $q^{(\infty)}$  та  $q^{(0)}$  за провідністю включень  $\lambda$ :  $q = (1 - \varepsilon_\lambda)q^{(0)} + \varepsilon_\lambda q^{(\infty)}$ , де  $\varepsilon_\lambda = (\lambda^2 + \lambda/2)/(\lambda^2 - 1)$ .

Остаточно вираз осередненого коефіцієнта  $q$  визначається таким чином:

$$q = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 1 - 2(\lambda - 1)a^2} \left( 1 - 2a^2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} (\varepsilon_a + \varepsilon_\lambda + \varepsilon_a \varepsilon_\lambda) \right) + \varepsilon_a (1 - \varepsilon_\lambda) \frac{(1 - a + a^2)(\lambda - 1)a}{1 - a^2 + a^3 + \lambda a^2(1 - a)} + 2a^2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \varepsilon_\lambda \left( 1 - \varepsilon_a \left( 1 - \frac{(1 - a + a^2)(\lambda + 1)}{2a(\lambda(1 - a) + a)} \right) \right). \quad (4.2)$$

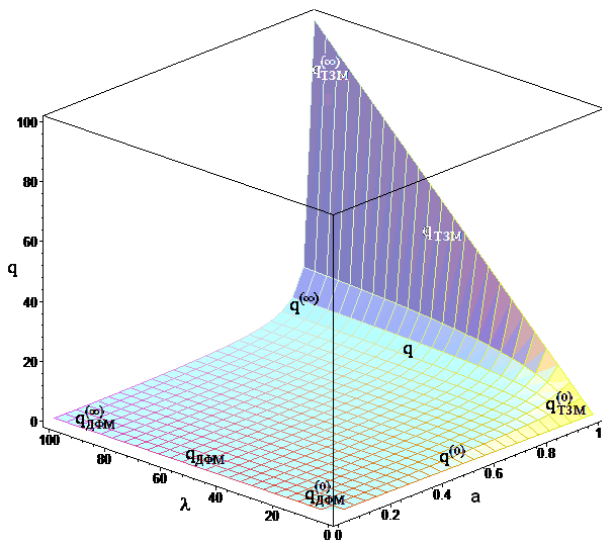


Рисунок 4.1 – Якісна картина розподілу асимптотик приведенного коефіцієнта теплопровідності

Аналіз виразу (4.2) показав, що всі граничні переходи в граничних випадках значень геометричного ( $a \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 1$ ) та фізичного ( $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 1$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ) параметрів композиту коректно виконуються.

На рис. 4.1 схематично визначено області, в яких основний внесок у вираз приведенного коефіцієнта вносять відповідні асимптотичні розкладення.

#### 4.2. Асимптотичний розв'язок для круглих включень з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз методом пилкоподібного перетворення аргументу [9]

Головний член асимптотики (3.3) для круглих абсолютно провідних включень співпадає з результатом, отриманим у статті [33]. Однак асимптотика (3.4) для випадку контакту включень не співпадає з наведеною у тій самій роботі:

$$q = \frac{\pi \lambda}{2(\ln \lambda - \gamma)} \text{ при } a = 1, \lambda \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

де  $\gamma$  – постійна Ейлера;  $\gamma \approx 0,58$  [47].

На нашу думку, така розбіжність результатів викликана відмінністю геометричної структури композитів, що розглядаються в обох випадках, і яка первісно закладена в постановці задачі. У статті [33] передбачається, що в граничному випадку розмірів включень вони торкаються, тобто існує точка контакту включень.

За методом осереднення [25, 26] розглядається елементарна структурна одиниця композиту – комірка (матриця з включенням, яке в ній знаходиться), причому умови періодичності для комірки визначають її повторюваність. А це означає, що в граничному випадку, при діаметрі включення, рівному розміру сторони комірки, залишається деякий нескінченно тонкий прошарок матриці в області контакту круглих фаз.

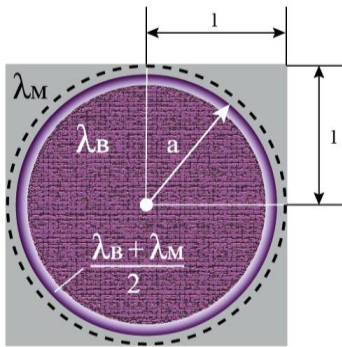


Рисунок 4.2 – Композит з інтерфейсом на межі розділу фаз

Розглянемо композитний матеріал, який має структуру, зображену на рис. 4.2: круглі включення великої провідності  $\lambda \gg 1$  та великого розміру  $a \rightarrow 1$  мають тонкий прошарок (інтерфейс) на межі розділу фаз, який характеризується середнім значенням провідностей матриці та включень  $(\lambda_B + \lambda_M)/2$ .

Вважатимемо провідності включень і матриці функціями розміру включень  $a$ , описавши їх узагальненими аналітичними співвідношеннями виду:

$$\tilde{\lambda}_B = a \lambda_B + (1-a)\lambda_M + 2a(1-a)(\lambda_B - \lambda_M)\tau'_B; \quad (4.4)$$

$$\tilde{\lambda}_M = a \lambda_B + (1-a)\lambda_M - 2a(1-a)(\lambda_B - \lambda_M)\tau'_M, \quad (4.5)$$

де  $\tau_B = \tau_B(\tilde{x})$ ,  $\tau_M = \tau_M(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} = 2x$  – пилкоподібні функції [48, 49] включень та матриці,  $\tau'_B$ ,  $\tau'_M$  – їх похідні (рис. 4.3), перетворені з урахуванням параметрів, що характеризують нахил зубів пили  $\theta_B = 2a - 1$ ,  $\theta_M = 1 - 2a$ , до вигляду:

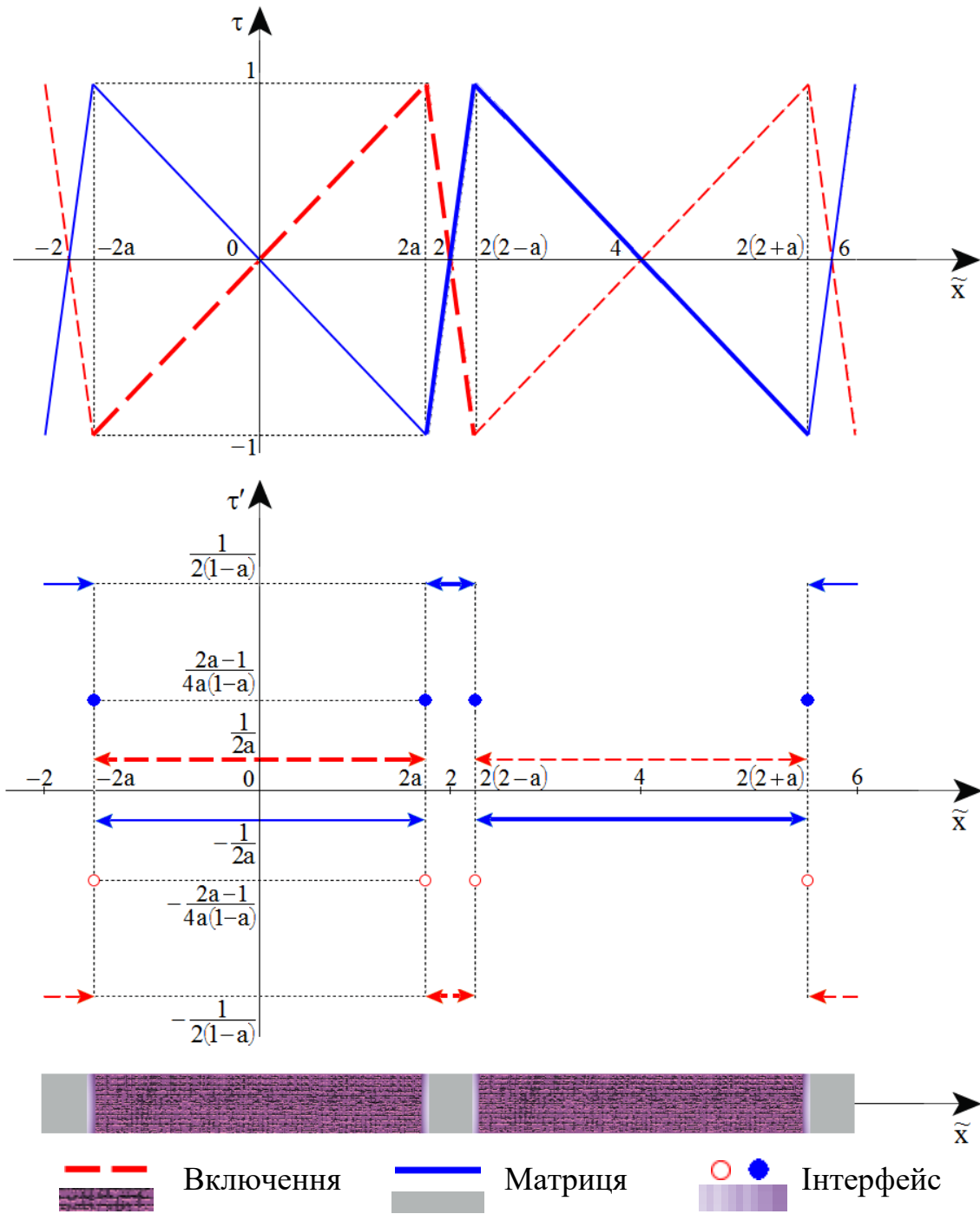


Рисунок 4.3 – Пілкоподібні функції включення та матриці  $\tau_B(\tilde{x})$ ,  $\tau_M(\tilde{x})$  та їх похідні  $\tau'_B(\tilde{x})$ ,  $\tau'_M(\tilde{x})$

$$\tau_B(\tilde{x}) = \begin{cases} \tilde{x}/(2a) & \text{при } -2a \leq \tilde{x} \leq 2a \\ -\frac{\tilde{x}-2}{2(1-a)} & \text{при } 2a \leq \tilde{x} \leq 2(2-a) \end{cases}; \quad \tau_M(\tilde{x}) = \tau_B(\tilde{x}) \begin{pmatrix} a \rightarrow 1-a \\ \tilde{x} \rightarrow \tilde{x}-2 \end{pmatrix}; \quad (4.6)$$

$$\tau'_B(\tilde{x}) = \begin{cases} 1/(2a) & \text{при } -2a < \tilde{x} < 2a \\ -\frac{2a-1}{4a(1-a)} & \text{при } \tilde{x} = \pm 2a; \tilde{x} = 2(2-a); \\ -1/(2(1-a)) & \text{при } 2a \leq \tilde{x} \leq 2(2-a) \end{cases}; \quad \tau'_M(\tilde{x}) = \tau'_B(\tilde{x}) \begin{pmatrix} a \rightarrow 1-a \\ \tilde{x} \rightarrow \tilde{x}-2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Вираз (3.2) приведенного параметра, знайдений за ТЗМ у випадку контакту включень, тобто при  $a=1$ ,  $\lambda \gg 1$ , з урахуванням узагальнених виразів провідностей (4.4), (4.5) може бути представлений співвідношенням:

$$q = \frac{\pi \tilde{\lambda}}{2} \cdot f_1(\tilde{\lambda}), \text{ де } \tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda}_B}{\tilde{\lambda}_M}, f_1(\tilde{\lambda}) = \frac{\sqrt{2\tilde{\lambda}}}{\tilde{\lambda}-1}. \quad (4.8)$$

Вираз (4.8) не визначений при  $\tilde{\lambda}=1$ . Для розкриття невизначеності та коректного переходу від пилкоподібних функцій до їх гладких аналогів скористаємося методом асимптотично еквівалентних функцій [50]. Оцінимо функцію  $f_1(\tilde{\lambda})$  із (4.8) при  $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$  таким чином:

$$f_1(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{\lambda}-1}{\sqrt{2\tilde{\lambda}}} \sim \frac{\sqrt{\tilde{\Delta}} \ln \tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\Delta}-1}} = f_0(\tilde{\lambda}) \text{ при } \tilde{\lambda} \rightarrow 1, \text{ де } \tilde{\Delta} = \frac{\tilde{\lambda}}{2} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}. \quad (4.9)$$

Тоді маємо:

– розкладення функцій  $f_1(\tilde{\lambda})$  і  $f_0(\tilde{\lambda})$  в ряди при  $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$  співпадають з точністю до членів порядку  $(\tilde{\lambda}-1)^4$  включно;

– вираз  $f_0(\tilde{\lambda}) = \frac{\sqrt{\tilde{\Delta}} \ln \tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\Delta}-1}}$  не змінюється при заміні  $\tilde{\lambda} \rightleftharpoons \tilde{\lambda}^{-1}$ , тобто

адекватно описує також функцію  $f_2(\tilde{\lambda}) = \frac{\tilde{\lambda}^{-1}-1}{\sqrt{2\tilde{\lambda}^{-1}}}$  при  $\tilde{\lambda} \rightarrow 1-0$  (рис. 4.4, 4.5).

Функція  $f_0(\tilde{\lambda})$  має таку характерну особливість: з одного боку, вид функції поблизу точки  $\tilde{\lambda}=1$  аналогічний симетричній пилкоподібній функції на півперіоді; з іншого – ця функція дозволяє в разі включень, які торкаються по тонкому прошарку, перейти від пилкоподібного до гладкого при всіх значеннях  $\tilde{\lambda}$  аргументу, тобто в деякому сенсі відбувається передача негладких властивостей аргументу – функції.

Тоді маємо при  $\lambda \rightarrow \infty$  асимптотичний вираз приведенного параметра у разі контакту абсолютно провідних круглих включень з інтерфейсом:

$$q_{\text{кр.і.}}^{(\infty)} = \frac{\pi \lambda}{2(\ln \lambda - \ln 2)}. \quad (4.10)$$

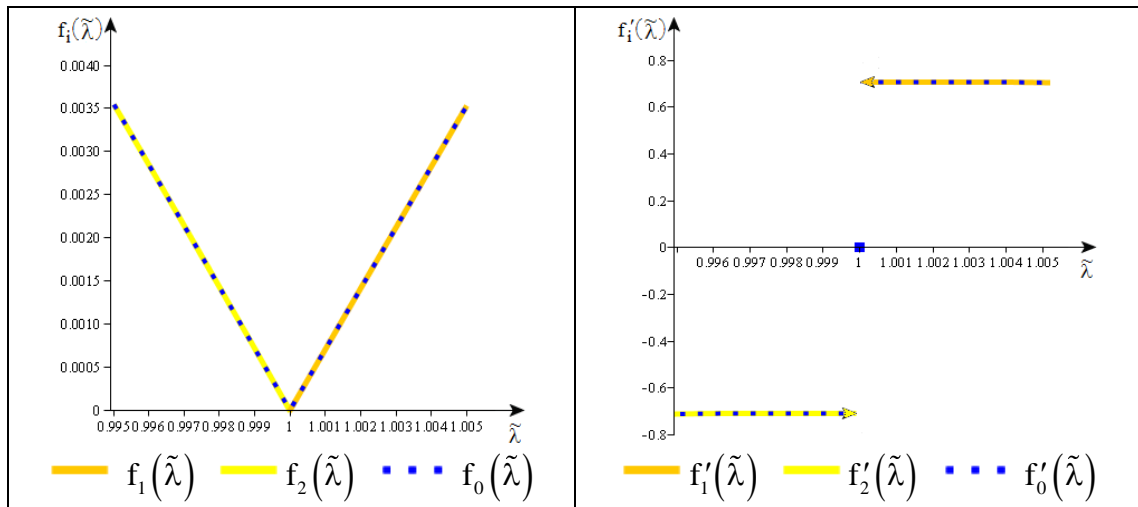


Рисунок 4.4 – Графіки асимптотично еквівалентних при  $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$  функцій

Рисунок 4.5 – Графіки похідних асимптотично еквівалентних при  $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$  функцій

Головна частина асимптотичної формули (4.10) співпадає з асимптотикою Р. В. О'Брайєна [51]; від результату (4.3) [33] вираз (4.10) відрізняється постійним членом:  $\delta = |\gamma - \ln 2| \approx 0,11$ .

Отже, використання математичного апарату негладкого перетворення аргументу та асимптотично еквівалентних функцій дало можливість врахувати локальні ефекти на межі розділу фаз композиту, які проблематично описати безпосередньо в рамках теорії осереднення. Це дозволило з фізичної точки зору значно розширити клас аналізованих структур композитів і в математичному плані призвело до співвідношення, що співпадає у випадку контакту абсолютно провідних круглих включень з відомим асимптотичним розв'язком [33, 51].

#### 4.3. Узагальнення асимптотичного розв'язку теорії змазки для непровідних круглих включень з інтерфейсом [9]

В записаному у термінах  $\tau$ -перетворення співвідношенні приведенного параметра для включень гранично великих геометричних розмірів  $a=1$  і провідності  $\lambda \ll 1$  оцінимо асимптотично еквівалентною функцією вираз:

$$f_3(\tilde{\lambda}) = (1 - \tilde{\lambda})\sqrt{2\tilde{\lambda}} \sim \frac{2\tilde{\lambda}\sqrt{\tilde{\Delta}} \ln \tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\Delta}-1}} = 2\tilde{\lambda}f_0(\tilde{\lambda}) \quad \text{при } \tilde{\lambda} \rightarrow 1, \quad (4.11)$$

де розкладення в ряди функцій у лівій та правій частинах рівності співпадають із точністю до членів порядку  $(1 - \tilde{\lambda})^4$  включно.

Тоді знаходимо асимптотичний вираз приведенного параметра у разі контакту непровідних круглих включень з інтерфейсом у вигляді:

$$q_{\text{кр.і.}}^{(0)} = \frac{2\lambda(\ln \lambda^{-1} - \ln 2)}{\pi}. \quad (4.12)$$

Отримане асимптотичне співвідношення приведенного параметру (4.12) для непровідних включень, що торкаються ( $a = 1$ ) по тонкому прошарку, є інверсією виразу для абсолютно провідних включень аналогічної структури: ці розв'язки алгебраїчно точно задовольняють теорему Келлера [39]:  $(q_{\text{кр.і.}}^{(0)}(\lambda^{-1}))^{-1} = q_{\text{кр.і.}}^{(\infty)}(\lambda)$ .

#### 4.4. Асимптотичні розв'язки для композитів із криволінійними ромбічними включеннями за наявності прошарку на межі розділу фаз [10]

Для композита з високопровідними криволінійними ромбічними включеннями, що торкаються за наявності тонкого прошарку на межі розділу фаз (рис. 4.6), розв'язок задачі за ТЗМ має місце при  $\lambda > 2$  і не може бути в явному вигляді використаним для оцінок узагальнених провідностей (4.4), (4.5) при  $\tilde{\lambda} \sim 1$ .

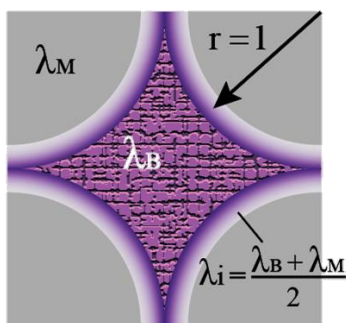


Рисунок 4.6 – Композит з високопровідними криволінійними ромбічними включеннями з інтерфейсом

Математичний алгоритм розв'язку в даному випадку базується на використанні теореми Келлера [39], виконанні необхідних перетворень співвідношення ТЗМ та оцінці отриманого виразу ефективного параметра  $q = 2/\pi \cdot f_1^{-1}(\tilde{\lambda})$  за допомогою асимптотичного співвідношення (4.9). Тоді для композиту з криволінійними ромбічними включеннями

абсолютної провідності, що торкаються по тонкому інтерфейсу на межі розділу фаз, приведений параметр теплопровідності отримуємо у вигляді:

$$q_{\text{кр. ромб. і.}}^{(\infty)} = \frac{2(\ln \lambda - \ln 2)}{\pi}. \quad (4.13)$$

Схема асимптотичного дослідження ефективного коефіцієнта провідності композитів з криволінійними ромбічними включеннями великих розмірів  $a \gg 0$  і низької провідності  $\lambda \ll 1$ , що торкаються по тонкому прошарку на межі розділу фаз, ідентична описаній вище і приводить до такого результату:

$$q_{\text{кр. ромб. і.}}^{(0)} = \frac{\pi}{2(\ln \lambda^{-1} - \ln 2)}. \quad (4.14)$$

#### 4.5. Асимптотичний розв'язок для гексагонального масиву круглих включень з інтерфейсом за допомогою апарату асимптотично еквівалентних функцій, визначених у термінах $\tau$ -перетворення [10]

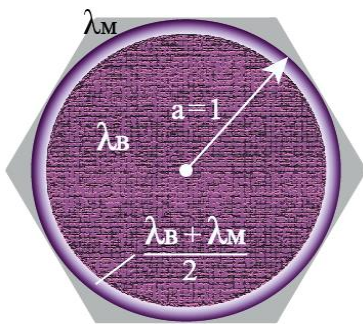


Рисунок 4.7 – Композит гексагональної структури з тонким інтерфейсом на межі розділу фаз

Для гексагонального масиву круглих включень з інтерфейсом у граничному випадку розміру включень  $a=1$  (рис. 4.7) головний член асимптотичного розкладення (3.14) у термінах  $\tau$ -перетворення аргументу представляється у вигляді:

$$q = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \cdot f_1(\tilde{\lambda}), \quad \text{де } f_1(\tilde{\lambda}) = \frac{2\frac{\tilde{\lambda}-1}{\tilde{\lambda}+1}}{\sqrt{1-\frac{\tilde{\lambda}-1}{\tilde{\lambda}+1}}}. \quad (4.15)$$

Використовуємо оцінки:

$$\text{при } \tilde{\lambda} \rightarrow 1: f_1(\tilde{\lambda}) = \frac{2\tilde{\Delta}^{(1)}}{\sqrt{1-\tilde{\Delta}^{(1)}}} \sim \frac{2(\tilde{\Delta}-1)^{3/2} (\tilde{\lambda}/2)^{1/4}}{\tilde{\Delta}^{1/2} (\tilde{\Delta}+1)^{1/4} \ln \tilde{\Delta}} = f_0(\tilde{\lambda}); \quad (4.16)$$

$$\text{при } \lambda \rightarrow \infty: \frac{2(\tilde{\Delta}-1)^{3/2} (\tilde{\lambda}/2)^{1/4}}{\tilde{\Delta}^{1/2} (\tilde{\Delta}+1)^{1/4} \ln \tilde{\Delta}} \sim \frac{\lambda}{\ln(\lambda/2)}, \quad (4.17)$$



де апроксимуюча функція  $f_0(\tilde{\lambda})$  в (4.16) коректно описує  $f_1(\tilde{\lambda})$  в околі точки  $\tilde{\lambda} = 1$ ; розкладення в ряди функцій  $f_1(\tilde{\lambda})$ ,  $f_0(\tilde{\lambda})$  співпадають з точністю до членів порядку  $(\tilde{\lambda} - 1)^4$  включно. Тоді отримуємо вираз приведенного параметра композиту гексагональної структури з абсолютно провідними включеннями  $\lambda \rightarrow \infty$  гранично великого розміру  $a = 1$  і тонким прошарком на межі розділу фаз:

$$q_{\text{гекс.і.}}^{(\infty)} = \frac{\pi\lambda\sqrt{3}}{2(\ln\lambda - \ln 2)}. \quad (4.18)$$

Адекватність запропонованої моделі та її математичного апарату підтверджується збігом головного члена асимптотики з отриманим в роботі [51] результатом.

#### **4.6. Асимптотична оцінка ефективної провідності гексагонального масиву непровідних круглих включень за наявності інтерфейсу на межі розділу фаз [10]**

Для визначення приведенного параметра гексагонального масиву непровідних круглих включень великих геометричних розмірів з інтерфейсом застосовувалася теорема Келлера [39] і такі оцінки:

$$-\frac{\sqrt{1+\tilde{\Delta}^{(1)}}}{2\tilde{\Delta}^{(1)}} \sim \frac{\tilde{\Delta}^{\frac{1}{2}}(2\tilde{\lambda}(\tilde{\Delta}+1))^{\frac{1}{4}} \ln \tilde{\Delta}}{2(\tilde{\Delta}-1)^{\frac{3}{2}}} \text{ при } \tilde{\lambda} \rightarrow 1; \quad \frac{\tilde{\Delta}^{\frac{1}{2}}(2\tilde{\lambda}(\tilde{\Delta}+1))^{\frac{1}{4}} \ln \tilde{\Delta}}{2(\tilde{\Delta}-1)^{\frac{3}{2}}} \sim \lambda \ln \frac{1}{2\lambda} \text{ при } \lambda \rightarrow 0. \quad (4.19)$$

Вираз приведенного параметра у разі контакту непровідних включень за наявності тонкого інтерфейсу на межі розділу фаз композиту отримано у вигляді:

$$q_{\text{гекс.і.}}^{(0)} = \frac{2\lambda(\ln\lambda^{-1} - \ln 2)}{\pi\sqrt{3}}. \quad (4.20)$$

Співвідношення (4.18), (4.20) для абсолютно провідних та непровідних включень гранично великого розміру  $a = 1$  з тонким прошарком на межі розділу фаз задовольняють теорему Келлера [39]:  $q_{\text{гекс.і.}}^{(\infty)}(\lambda) = \left( q_{\text{гекс.і.}}^{(0)}(\lambda^{-1}) \right)^{-1}$ .

## РОЗДІЛ 5

### АНАЛІЗ УМОВ КОНТАКТУ «МАТРИЦЯ – ВКЛЮЧЕННЯ» В КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУРАХ

#### 5.1. Моделі двофазних волокнистих композитів, що описують умови контакту «матриця – включення» [9]

В силу конструкційних, технологічних або інших структурних особливостей волокнистих композиту можливі 3 різні граничні випадки їх структури:

- існує деякий каркас із матеріалу матриці провідності  $\lambda_M$ , в який вставлені круглі включення провідності  $\lambda_B$ . В цьому випадку не відбувається контакту круглих фаз: між ними залишається тонкий прошарок із матеріалу матриці (рис. 5.1);

- каркас із матеріалу провідності  $\lambda_B$  зі вставленими криволінійними ромбічними включеннями з провідністю  $\lambda_M$ . Тоді здійснюється контакт круглих фаз (рис. 5.3);

- на межі розділу фаз є тонкий прошарок (інтерфейс), провідність якого дорівнює середньому значенню провідностей матеріалів  $\lambda_B$  і  $\lambda_M$ , тобто  $(\lambda_B + \lambda_M)/2$  (рис. 5.5).

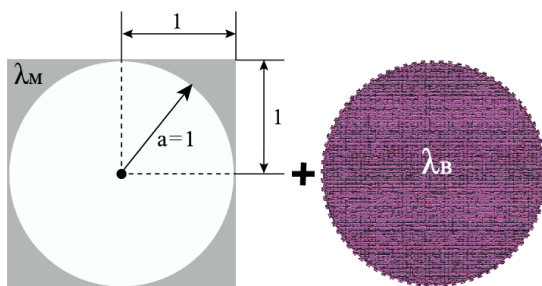


Рисунок 5.1 – Структура композиту: каркас із матеріалу матриці з круглими включеннями

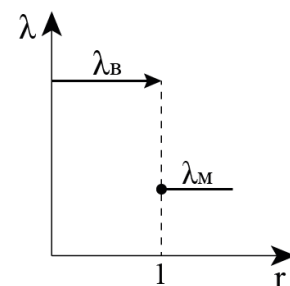


Рисунок 5.2 – Функція провідності у разі розділених прошарком матриці круглих включень

З математичної точки зору наведені на рис. 5.1, 5.3 і 5.5 випадки контакту «матриця – включення» описуються різними узагальненими функціями

провідності. Вигляд таких залежностей у довільному радіальному перерізі комірки схематично проілюстровано відповідно на рис. 5.2, 5.4 і 5.6.

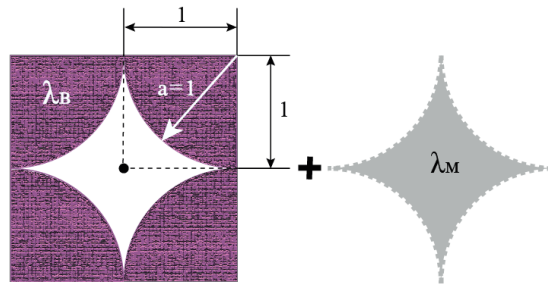


Рисунок 5.3 – Структура композиту: каркас із матеріалу включень із криволінійними ромбічними вставками

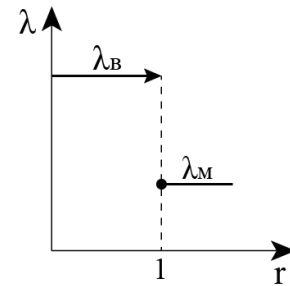


Рисунок 5.4 – Функція провідності у разі контакту круглих включень

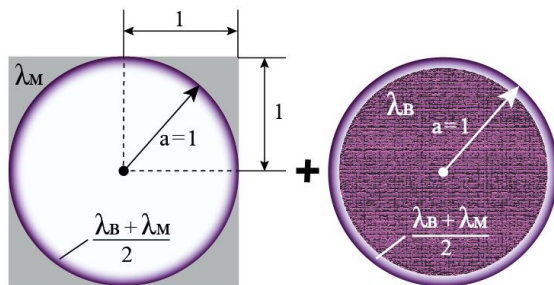


Рисунок 5.5 – Структура композиту: тонкий прошарок на межі розділу фаз, що характеризується середнім значенням провідностей матриці та включення

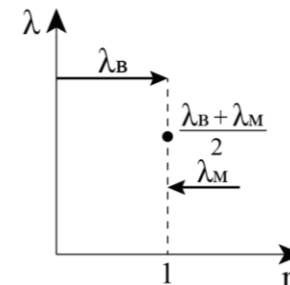


Рисунок 5.6 – Функція провідності в разі контакту фаз по прошарку із середнім значенням провідностей

При визначенні ефективних параметрів композитів питання наявності чи відсутності нескінченно тонкого інтерфейсу на межі його фаз не є принциповим до того часу, поки розміри включень не досягають свого граничного значення, а їх провідність не наближається до нескінченно малої чи нескінченно великої. Якщо ж  $\lambda \rightarrow 0$  або  $\lambda \rightarrow \infty$  і  $a \rightarrow 1$ , то умови контакту «матриця – включення» істотно впливають на ефективні характеристики композиту.

## 5.2. Асимптотичні наближення в моделях двофазних волокнистих композитів та фізична еквівалентність структур [10]

При теоретичних дослідженнях композитних матеріалів ефективні параметри визначають не в абсолютних, а у відносних величинах – зазвичай, відносно провідності матриці. Однак для значного класу композитів регулярної

структури поняття матриці та включень є відносними та залежать від їх вибору дослідником.

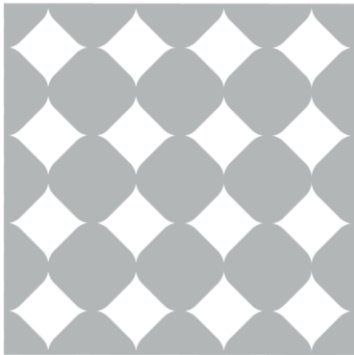


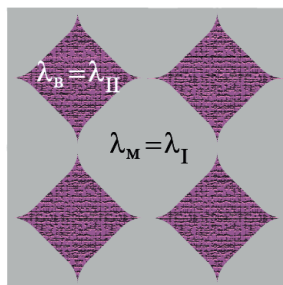
Рисунок 5.7 –  
Композитний матеріал  
регулярної структури

Наприклад, композит, зображений на рис. 5.7, можна трактувати як структуру з ромбічними включеннями із загостреними кутами, так і як масив з ромбічними включеннями із округленими кутами.

Другий важливий момент досліджень – математичний опис фізичних характеристик (у даному випадку – теплопровідності) матриці та включень композиту.

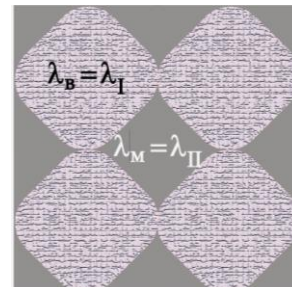
Очевидно, що терміни «абсолютно провідні» і «непровідні» включення, що широко використовуються в механіці композитів, є не чим іншим як математичною ідеалізацією – реальні властивості фаз композиту в таких випадках було б більш точним описати за допомогою співвідношень:  $\lambda_B \gg \lambda_M \Rightarrow \lambda = \lambda_B / \lambda_M \gg 1$  або  $\lambda_B \ll \lambda_M \Rightarrow \lambda = \lambda_B / \lambda_M \ll 1$ .

Однак якщо змінити нормування у цих співвідношеннях, тобто визначати  $\lambda$  не відносно провідності матриці, а відносно провідності включень, або (що те ж саме) змінити ролі фаз «включення» – «матриця», то структура з «абсолютно провідними» включеннями вже описуватиметься як масив з «непровідними» вставками, і навпаки (рис. 5.8).



а) Композит з високопровідними ромбічними включеннями із загостреними кутами:

$$\lambda_M = \lambda_I, \lambda_B = \lambda_{II}, \lambda^{(1)} = \frac{\lambda_B}{\lambda_M} = \frac{\lambda_{II}}{\lambda_I} \gg 1$$



б) Композит з низькопровідними ромбічними включеннями із закругленими кутами:

$$\lambda_M = \lambda_{II}, \lambda_B = \lambda_I, \lambda^{(2)} = \frac{\lambda_B}{\lambda_M} = \frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} \ll 1$$

Рисунок 5.8 – Фізично еквівалентні композитні структури

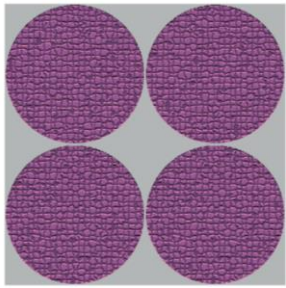
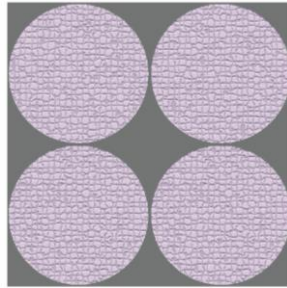
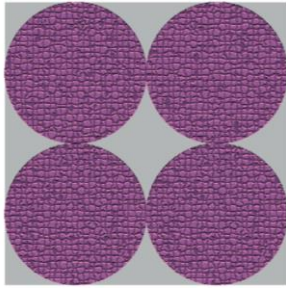
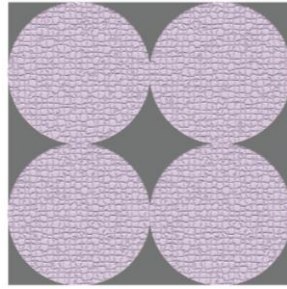
Очевидно, що обидві наведені на рис. 5.8 моделі описують один і той самий реальний композит, тобто з фізичної точки зору є еквівалентними. Ефективні параметри  $\lambda_{\text{еф}}^{(1)}$ ,  $\lambda_{\text{еф}}^{(2)}$  фізично еквівалентних композитних структур зв'язані співвідношенням:

$$\lambda_{\text{еф}}^{(1)}(\lambda) = \lambda \cdot \lambda_{\text{еф}}^{(2)}(\lambda^{-1}). \quad (5.1)$$

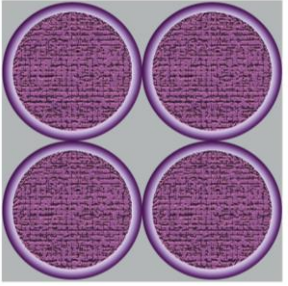
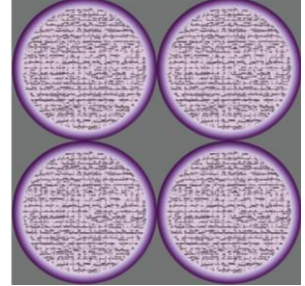
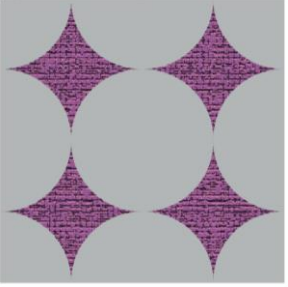
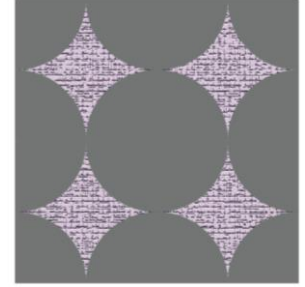
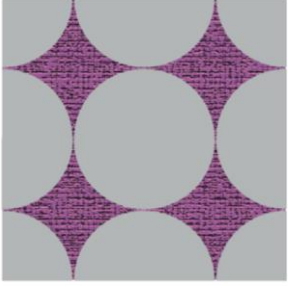
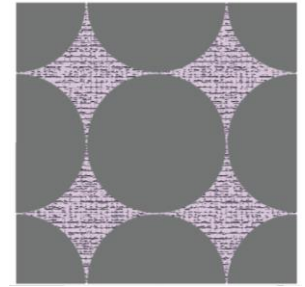
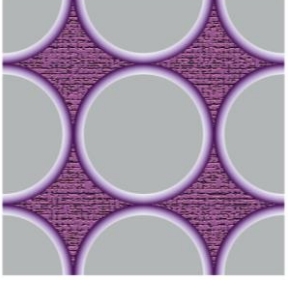
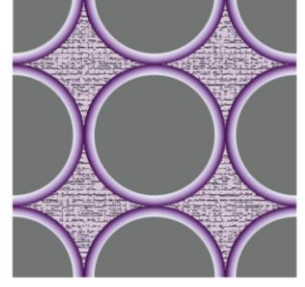
### 5.3. Асимптотичні представлення ефективних параметрів композитів різної структури [10]

Використовуючи співвідношення для фізично еквівалентних композитних структур та знайдені асимптотичні вирази ефективних параметрів композитів із круглими та криволінійними ромбічними включеннями у випадках їх гранично великої і малої провідності, можна, узагальнивши їх, отримати головні члени асимптотик для фізично еквівалентних структур (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Асимптотичні вирази ефективних параметрів композитів різної структури

Структура композита	Асимптотичний вираз ефективного параметра	Структура композита	Асимптотичний вираз ефективного параметра
<b>1. Круглі абсолютно провідні включення</b> $\lambda \rightarrow \infty$		<b>2. Круглі непровідні включення</b> $\lambda \rightarrow 0$	
	1.1. Контакт по матеріалу матриці (криволінійним ромбам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \quad (3.4)$		2.1. Контакт по матеріалу матриці (криволінійним ромбам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi} \quad (3.6)$
	1.2. Контакт по матеріалу включень (колам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \frac{2\lambda}{\pi} \quad (5.2)$ (із (3.12), (5.1))		2.2. Контакт по матеріалу включень (колам) $\lambda = \frac{\lambda_{\text{кр.}}}{\lambda_{\text{кр. ромб.}}}$ $q = \frac{\pi\lambda}{2} \quad (5.3)$ (із (3.10), (5.1))

Кінець таблиці 5.1

	<p>1.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр.}}{\lambda_{кр. ромб.}}$ $q = \frac{\pi \lambda}{2 \ln \lambda} \quad (4.10)$		<p>2.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр.}}{\lambda_{кр. ромб.}}$ $q = \frac{2 \lambda \ln \lambda^{-1}}{\pi} \quad (4.12)$
<p><b>3. Криволінійні ромбічні абсолютно провідні включення <math>\lambda \rightarrow \infty</math></b></p>		<p><b>4. Криволінійні ромбічні непровідні включення <math>\lambda \rightarrow 0</math></b></p>	
	<p>3.1. Контакт по матеріалу матриці (колам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{\pi}{2} \quad (3.10)$		<p>4.1. Контакт по матеріалу матриці (колам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{2}{\pi} \quad (3.12)$
	<p>3.2. Контакт по матеріалу включень (криволінійним ромбам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{\sqrt{2} \lambda}{\pi} \quad (5.4)$ <p>(із (3.6), (5.1))</p>		<p>4.2. Контакт по матеріалу включень (криволінійним ромбам)</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \quad (5.5)$ <p>(із (3.4), (5.1))</p>
	<p>3.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{2 \ln \lambda}{\pi} \quad (4.13)$		<p>4.3. Інтерфейс: контакт по матеріалу із середнім значенням провідностей матриці та включень</p> $\lambda = \frac{\lambda_{кр. ромб.}}{\lambda_{кр.}}$ $q = \frac{\pi}{2 \ln \lambda^{-1}} \quad (4.14)$

Аналіз наведених у табл. 5.1 асимптотичних виразів показує, що вони, обрані попарно відповідним чином, задовольняють так званій формулі «додаткових систем», отриманій А. М. Дихне, яку можна трактувати як узагальнення відомої формули Дихне для композитів з рівнопредставленими фазами [52]:  $\lambda_{эф}(c) \cdot \lambda_{эф}(1-c) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$  при  $c \neq 1/2$ , де  $c$  – концентрація включень.

## РОЗДІЛ 6

## ПОБУДОВА ВИЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ФОРМУЛИ МАКСВЕЛЛА

### 6.1. Суть двофазної моделі волокнистого композиту з малими включеннями квадратного перерізу [12]

Запропонована двофазна модель композиту (ДФМ), фізична суть ідеалізації в рамках якої визначається малими геометричними розмірами включень  $a \ll 1$  і полягає в наступному: форма вставок не надає принципового впливу на осереднену теплопровідність, тому що її значення визначається переважно концентрацією включень, а не їх формою; умови періодичності не будуть істотно впливати на провідність структури поблизу включення.

Математичний опис ДФМ здійснюється із застосуванням асимптотичних спрощень МЗФМ і методу послідовних наближень (альтернуючого методу) Шварца (МШ) [53] шляхом апроксимації квадратного контуру включення з послідовним уточнюванням його форми (рис. 6.1, 6.2).



Рисунок 6.1 – Апроксимація квадратного включення

Рисунок 6.2 – Апроксимації контуру включення в нульовому та першому наближеннях

Рівняння перетвореного контуру включення з округленими кутами в полярних координатах  $r, \theta$  записується на проміжку  $\theta \in [0; \pi/2]$  у вигляді:

$$r(\theta) = \begin{cases} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}a} / \left( \sqrt{\pi + 2\sqrt{2}} \cos \theta \right) = \tilde{a} / \cos \theta & \text{при } \theta \in [0; \pi/8] \\ 2\sqrt{2}a / \sqrt{\pi + 2\sqrt{2}} & \text{при } \theta \in [\pi/8; 3\pi/8]. \\ \sqrt{4 + 2\sqrt{2}a} / \left( \sqrt{\pi + 2\sqrt{2}} \sin \theta \right) = \tilde{a} / \sin \theta & \text{при } \theta \in [3\pi/8; \pi/2] \end{cases} \quad (6.1)$$

Перетворення квадратного контуру за МЗФМ здійснюється в спосіб:  
 $r = \tilde{a}(1 + \varepsilon_1 \cos 4\theta + \dots)$ . Як малий параметр прийнята величина:  
 $\varepsilon_1 = (\tilde{a} - \tilde{a}) / \tilde{a} \approx -0,0517$ .

## 6.2. Розв'язок задачі методом Шварца на основі двофазної моделі для композиту з квадратними включеннями малого розміру [12]

Розв'язок локальної задачі з урахуванням (01) та (02) наближень МШ представляється у вигляді:

$$\mathbf{u}_1^\pm = \mathbf{u}_1^{\pm(01)} + \mathbf{u}_{11}^{(02)} + \mathbf{u}_{12}^{(02)} = \mathbf{u}_1^{\pm(01)} + \mathbf{u}_1^{(02)}, \text{ де} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{u}_1^{- (01)} = \mathbf{A}^{(01)*} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} \eta \right); \quad \mathbf{u}_1^{+ (01)} = \mathbf{B}^{(01)*} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \right); \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}_1^{(02)} = \mathbf{B}_0^{(02)*} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} \eta \right) + \quad (6.4)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_n^{(02)*} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} (\operatorname{sh} \pi n \xi \cos \pi n \eta - \operatorname{ch} \pi n \eta \sin \pi n \xi) + \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} (\operatorname{sh} \pi n \eta \cos \pi n \xi - \operatorname{ch} \pi n \xi \sin \pi n \eta) \right];$$

$$\mathbf{A}^{(01)*} = -\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}; \quad \mathbf{B}^{(01)*} = -\frac{(\lambda - 1)\tilde{a}^2}{\lambda + 1}; \quad \mathbf{B}_0^{(02)*} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \cdot \frac{\pi \tilde{a}^2}{4}; \quad \mathbf{B}_n^{(02)*} = -\mathbf{C}_n^{(02)*} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \tilde{a}^2 \mathbf{S}_n;$$

$$\mathbf{S}_n = \frac{e^{-\pi n} \operatorname{Im} E_1(-\pi n + i\pi n) - e^{\pi n} \operatorname{Im} E_1(\pi n + i\pi n) + \pi e^{-\pi n}}{\operatorname{sh} \pi n}, \quad (6.5)$$

де  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\operatorname{Im} E_1$  – уявна частина інтегральної показової функції [47].

З урахуванням розв'язків (6.2)-(6.5) приведений коефіцієнт за ДФМ з точністю до членів порядку  $a^2$  включно має вигляд:  $q_{\text{ДФМ}} = 1 + 2(\lambda - 1)a^2 / (\lambda + 1)$ .



Визначено область застосування знайденого в рамках ДФМ виразу, і на підставі чисельних оцінок запропоновано критерій того, яке включення можна вважати «малим».

### 6.3. Побудова ітерацій вищих порядків методу Шварца в рамках двофазної моделі композиту [12]

Продовжуючи в рамках ДФМ ітераційний процес за МШ, будемо (03) та (04) наближення. У (03) наближенні треба зняти нев'язки, які дає на контурі включення функція  $u_1^{(02.0)} = B_0^{(02)*} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \xi + \frac{\partial u_0}{\partial y} \eta \right)$ . У (04) наближенні знімаємо нев'язки, які дає функція  $u_1^{+(03.0)}$  на зовнішньому контурі матриці. Продовження ітераційного процесу за МШ дає після виконання  $2n$  ітерацій вираз для осередненого коефіцієнта у вигляді ряду, згортаючи який за умови  $a \ll 1$ , приходимо до співвідношення ФМ [30]:

$$q^{(2n)} = 1 + 2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} a^2 + 2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^2 a^4 + \dots + 2 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^n a^{2n} + \dots = \frac{1 - a^2 + \lambda(1 + a^2)}{1 + a^2 + \lambda(1 - a^2)}. \quad (6.6)$$

Застосування ДФМ і МШ дає можливість аналітично показати, що головний член асимптотичного розкладення приведенного параметра для квадратних включень малої концентрації представляє собою ФМ і співпадає з верхньою межею Хашина – Штрікмана [41, 42] при  $0 \leq \lambda \leq 1$  та з нижньою – при  $1 \leq \lambda < \infty$ .

### 6.4. Побудова вищих наближень формули Максвелла для волокнистих композитів із круглими включеннями [13]

Побудовані вищі наближення та знайдені аналітичні вирази, що уточнюють ФМ, для волокнистих композитів із круглими включеннями. За

N-ітераційною процедурою МШ отримано вираз ефективного коефіцієнта теплопровідності  $q_{\text{ШВ}(N)}$  у вигляді:

$$q_{\text{ШВ}(N)} = q_{\text{ФМ}} + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi^2 a^6}{4} \frac{(\lambda - 1)^2}{\left(\lambda(1 - \pi a^2/4) + 1 + \pi a^2/4\right)^2} \left( \Delta_1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4} \Delta_2 \right), \text{ де} \quad (6.7)$$

$$\Delta_1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\pi \ell)^{4n-2} a^{8n-4}}{2^{2n-2} (2n-1)(4n-1)!}; \quad \Delta_2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \sum_{j=1}^{\infty} S_{j\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (\pi j)^{4m-2} a^{8m-4}}{(2m-1)(4m-1)!(4m-3)!} \times$$

$$\times \left( (\pi \ell)^{4m-2} S_{\ell} + \sum_{k=1}^m (-1)^{\ell+k+1} \frac{(4k-3)! (\pi \ell)^{4m-4k}}{2^{2k-2} \text{sh } \pi \ell} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\pi \ell)^{4n-2} a^{8n-4}}{2^{2n-1} (2n-1)(4n-1)!}. \quad (6.8)$$

Знайдений вираз приведенного коефіцієнта асимптотично, з точністю до членів порядку  $a^{14}$  включно, задовольняє теорему Келлера [39]. При цьому сума головної частини асимптотичного розкладення  $q_{\text{ФМ}}$  та першої поправки до нього  $\Delta_1$  задовольняє теорему Келлера до членів порядку  $a^{2n}$  включно за будь-яких значень  $n$ . Похибку вносить уже друга поправка  $\Delta_2$ , порядок якої за малих значень  $a$  становить  $a^{16}$ .

### 6.5. Аналіз меж застосування розв'язку за N-ітераційною процедурою методу Шварца та асимптотична оцінка поправки формули Максвелла [13]

У виразі (6.7) головною частиною асимптотичного представлення приведенного параметра є ФМ  $q_{\text{ФМ}}$ , а  $\Delta_1$  і  $\Delta_2$  являють собою поправки, порядок яких  $a^{10}$  й вище; тобто, мінімальний порядок поправки ФМ становить  $a^{10}$ :

$$q_{\text{ШВ}(N)} = q_{\text{ФМ}} + O(a^{10}) = \frac{1 - \pi a^2/4 + \lambda(1 + \pi a^2/4)}{1 + \pi a^2/4 + \lambda(1 - \pi a^2/4)} + O(a^{10}). \quad (6.9)$$

Цей висновок якісно збігається з результатом, отриманим у статті [31] для випадку непровідних включень (порожнин).

З урахуванням членів порядку  $a^{18}$  включно виконано асимптотичний і кількісний аналіз результатів розрахунків ефективного параметра (6.7), (6.8) для різних значень розмірів та провідності включень. Показано, при великих розмірах включень ( $a > 0,8$ ) великої ( $10 < \lambda < \infty$ ) або малої ( $0 < \lambda < 0,1$ ) провідності суттєвим є вплив контрастності фаз композиту й істотно впливає поправка, знайдена МШ. При розмірах включень, близьких до граничних ( $a \rightarrow 1$ ), гранично великої ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) або гранично малої ( $\lambda \rightarrow 0$ ) провідності, ні співвідношення Максвелла, ні N-ітераційній розв'язок за МШ не дають достовірної картини поведінки приведенного параметра – про це свідчить розбіжність результатів розрахунків з даними обчислень за асимптотичними розв'язками [5, 33].

В зв'язку з цим стає очевидним, що МШ не дозволяє отримати розв'язок, що коректно описував би ефективні характеристики композиту при будь-яких значеннях його фізико-геометричних параметрів. Врахування наступних членів розкладення у розв'язку за N-ітераційною процедурою МШ ситуацію, зрозуміло, не виправить: їх порядок буде  $o(a^{18})$ , порядок асимптотики вони не змінять і принципово на асимптотичне розкладення не вплинуть. Отже, знайдений за МШ розв'язок потребує модифікації.

## 6.6. Уточнення формули Максвелла із застосуванням техніки Паде-апроксимацій [14]

Представимо вираз приведенного параметра за МШ у вигляді:

$$q = 1 + 2 \sum_{j=1}^9 \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4} \right)^j + \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)^3 \frac{\pi^4 a^{10}}{4^3} \left( 1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4} \right)^2 \times \left( \delta_1^{(1)} + \delta_1^{(2)} \frac{\pi^4 a^8}{4^4} + \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi^3 a^6}{4^3} \delta_2^{(11)} \right), \quad (6.10)$$

враховуючи члени, порядок яких не перевищує  $a^{18}$  при  $n = 2, m = 1$  в рядах:

$$\delta_1^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell^{4n-1} \frac{(-1)^{n+1} 2^{6n-2}}{(2n-1)(4n-1)!}; \delta_2^{(mn)} = \frac{(-1)^{m+1} 2^{8m-4}}{(2m-1)(4m-1)!(4m-3)!} \frac{(-1)^{n+1} 2^{6n-3}}{(2n-1)(4n-1)!} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\infty} S_j j^{4m-1} \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell^{4n-1} \left( (\pi \ell)^{4m-2} S_{\ell} + \sum_{k=1}^m (-1)^{\ell+k+1} \frac{(4k-3)! (\pi \ell)^{4m-4k}}{2^{2k-2} \operatorname{sh} \pi \ell} \right). \quad (6.11)$$

Розкладення Шварца – Паде (ШВ-П) знаходимо у спосіб:

– перебудуємо вираз (6.10) у Паде  $[0/18]$  за розміром включення  $a$ , тобто записуємо так звану «зворотну» складову  $q_{[0/18]}(\lambda, a)$ ;

– перебудуємо в Паде  $[18/0]$  за розміром включення  $a$  вираз  $q_{[18/0]}^{-1}(\lambda^{-1}, a)$ , отримавши «пряму» складову;

– зрощуємо Паде-апроксиманти  $q_{[0/18]}(\lambda, a)$  і  $q_{[18/0]}^{-1}(\lambda^{-1}, a)$  за провідністю включень  $\lambda$  у триточкову АП:  $q(a, \lambda) = \frac{q_{[18/0]}^{-1}(\lambda^{-1}, a)}{\lambda + 1} + \frac{\lambda q_{[0/18]}(\lambda, a)}{\lambda + 1}$ .

Тоді отримуємо аналітичний вираз приведенного параметра теплопровідності  $q_{\text{ШВ-П}}$ , знайдений методом ШВ-П:

$$q_{\text{ШВ-П}} = \frac{1}{\lambda + 1} \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^9 \Delta^j + \Delta^3 \pi a^4 (1 + \Delta)^2 \delta_1^{(1)} - \Delta^4 \frac{\pi^3 a^8}{4^2} (1 + 2\Delta) \delta_2^{(11)} + \Delta^3 \frac{\pi^5 a^{12}}{4^4} \delta_1^{(2)} \right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{\lambda + 1} \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^9 (-\Delta)^j - \Delta^3 \pi a^4 (1 - \Delta)^2 \delta_1^{(1)} - \frac{\Delta^4 \pi^3 a^8}{4^2} (1 - 2\Delta) \delta_2^{(11)} - \frac{\Delta^3 \pi^5 a^{12}}{4^4} \delta_1^{(2)} \right]^{-1}, \quad (6.12)$$

$$\text{де } \Delta = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{\pi a^2}{4}; \delta_1^{(1)} = \frac{8}{3} \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell^3; \delta_1^{(2)} = -\frac{64}{945} \sum_{\ell=1}^{\infty} S_{\ell} \ell^7; \quad (6.13)$$

$$\delta_2^{(11)} = \frac{32}{9} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( (\pi \ell)^2 S_{\ell} + \frac{(-1)^{\ell+2}}{\sinh \pi \ell} \right) \ell^3 \sum_{j=1}^{\infty} S_j j^3.$$

На рис. 6.3-6.5 наведено графіки осередненого коефіцієнта, обчисленого за методом ШВ-П (6.12), (6.13), порівняно з узагальненим наближенням МШ, ФМ та відомими асимптотичними розв'язками інших авторів. У табл. 6.1 представлено дані розрахунків  $q_{\text{ШВ-П}}$  для включень великих розмірів, близьких

до граничних, великої провідності (включаючи ідеально провідні), у порівнянні з асимптотичними розв'язками інших авторів.

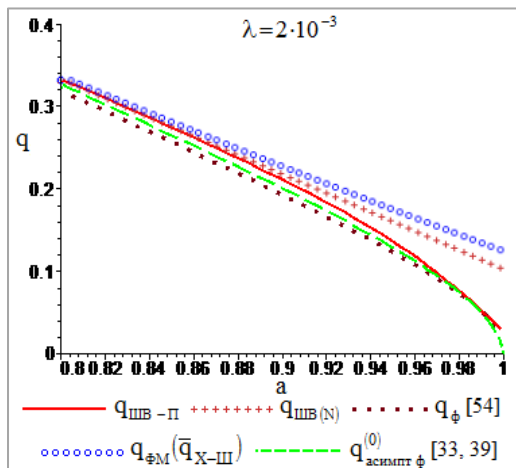


Рисунок 6.3 – Приведений коефіцієнт для включень малої провідності  $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$

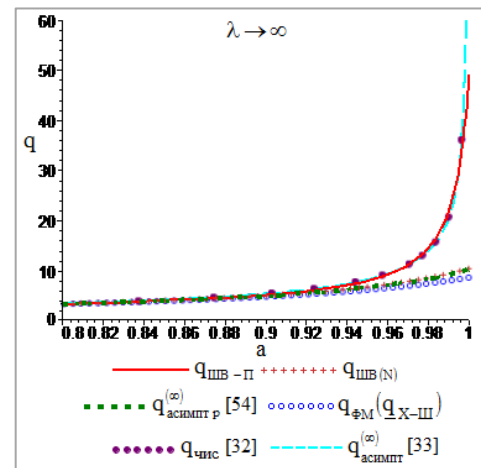


Рисунок 6.4 – Приведений коефіцієнт для абсолютно провідних включень  $\lambda \rightarrow \infty$

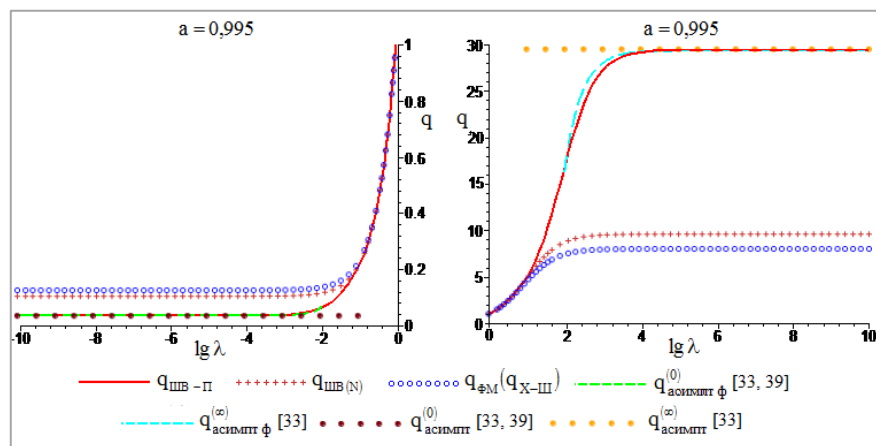


Рисунок 6.5 – Приведений коефіцієнт для включень гранично великих розмірів  $a = 0,995$

Таблиця 6.1 – Результати розрахунку різними методами ефективного коефіцієнта для включень великих розмірів і великої провідності

Провідність включень $\lambda = 10^5$				
Розмір включень $a$	$q_{\text{асимпт}}^{(\infty)} [33]$	$q_{\text{ТФММ}}$	$q_{\text{ШВ-П}}$	$q_{\text{Ф}} (6.8.90) [54]$
0,99	20,1233	20,8685	21,2048	21,3804
0,991	21,3212	22,0828	22,4021	22,6170
0,995	29,3006	30,1366	29,1710	30,7820
0,996	32,8446	-	31,6260	34,5375
Провідність включень $\lambda \rightarrow \infty$				
Розмір включень $a$	$q_{\text{асимпт}}^{(\infty)} [33]$	$q_{\text{ТФММ}}$	$q_{\text{ШВ-П}}$	$q_{\text{Ф}} (6.8.90) [54]$
0,99	20,1286	21,0343	21,3190	20,2645
0,991	21,3273	22,2524	22,5311	21,4676
0,995	29,3137	29,2098	29,4004	29,4742
0,996	33,0177	31,7631	31,8990	33,1837

Розв'язок ШВ-П асимптотично, з точністю до членів порядку  $a^{14}$  включно, задовольняє теорему Келлера та потрапляє у «вилку» Хашина – Штрікмана.

Перетворення N-ітераційного розв'язку МШ за допомогою техніки АП значно розширює сферу його застосування: вираз ШВ-П ефективного коефіцієнта (6.12), (6.13) адекватно описує якісний характер його зміни в області граничних значень геометричного та фізичного параметрів композиту і в абсолютному виразі працює з достатньою для практичних цілей точністю для включень будь-який провідності ( $0 \leq \lambda < \infty$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ ) при їх розмірах  $0 \leq a \leq 0,996$ .

### 6.7. Асимптотичне осереднення вищого порядку для динамічних задач [15]

1) Побудовані наближення вищого порядку для неоднорідної системи з неперервними параметрами.

Розглядається задача Неймана на власні значення:

$$\frac{d}{dx} \left[ a(x/\varepsilon) \frac{du}{dx} \right] + pu = 0; \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{при } x=0, x=1, \quad (6.14)$$

де  $a(x/\varepsilon) = a(x/\varepsilon + 1)$ ,  $0 < a_0 \leq a(x/\varepsilon) \leq a_1$ ,  $u(x)$  – власна форма,  $p$  – власне значення (спектральний параметр).

Розв'язок задачі представляється у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра  $\varepsilon$  і після виконання чотирьох наближень приводить до таких результатів щодо власних форм і власних значень:

$$u_0 \equiv u_0(x); \quad u_0 = A \cos(\pi n x), \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (6.15)$$

$$u_1 = u_{f1}(\eta) \frac{du_0}{dx}, \quad \text{де } u_{f1} = \frac{1}{2} - \eta + a_h \left[ \int_0^\eta a^{-1} d\eta - \int_0^1 \left( \int_0^\eta a^{-1} d\eta \right) d\eta \right], \quad a_h = \left( \int_0^\eta a^{-1} d\eta \right)^{-1}; \quad (6.16)$$

$$u_2 = u_{f2}(\eta) \frac{d^2 u_0}{dx^2}, \quad \text{де } u_{f2}(\eta) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \eta(\eta-1) - \quad (6.17)$$

$$-a_h \left[ \int_0^{\eta} \left( \int_0^{\eta} a^{-1} d\eta \right) d\eta - \int_0^1 \left( \int_0^{\eta} \left( \int_0^{\eta} a^{-1} d\eta \right) d\eta \right) d\eta \right] + a_h \left( \eta - \frac{1}{2} \right) \int_0^{\eta} a^{-1} d\eta d\eta;$$

$$p_0 = \pi^2 n^2 a_h; p_1 = 0; p_2 = \pi^2 n^2 p_0 \Phi, \quad (6.18)$$

$$\text{де } \Phi = a_h \int_0^1 \left( a^{-1} \int_0^{\eta} u_{f1}(\eta) d\eta \right) d\eta - \int_0^1 \left( \int_0^{\eta} u_{f1}(\eta) d\eta \right) d\eta.$$

Знайдене після осереднення рівняння третього наближення значення  $p_1 = 0$  підтверджується результатами досліджень [55, 56].

2) Система з періодично сконцентрованими дискретними елементами.

Розглядається задача про поздовжні коливання стрижня з точковими масами  $M$ ; кількість мас дорівнює  $2n + 1$ ;  $\ell_1 = 2\ell / (2n + 1)$  (рис. 6.6).

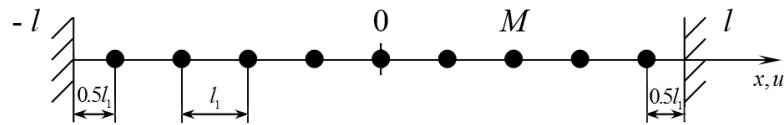


Рисунок 6.6 – Стрижень із точковими масами

Рівняння поздовжніх коливань стрижня записується в безрозмірній формі таким чином:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \sum_{i=-n}^n \delta(\xi - \varepsilon i) = 0; u = 0 \text{ при } \xi = \pm 1; \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial \xi} - \frac{\partial u^+}{\partial \xi} = m \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \Big|_{\xi=k\varepsilon} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n); u^- = u^+, \quad (6.20)$$

де  $u^{(\pm)} = \lim_{\xi \rightarrow k\varepsilon \pm 0} u$ ;  $\delta(\xi - \varepsilon i)$  – дельта-функція Дірака [47].

Для випадку власних коливань розв'язок задачі у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра  $\varepsilon$  для випадку малих мас  $m \approx \varepsilon$  визначається з урахуванням трьох наближень співвідношеннями:

$$u_0 = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2\ell} + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0 m_1 u_0 \varphi(\varphi-1)}{2} + \varepsilon^3 \frac{\lambda_0 m_1 \varphi(2\varphi^2 + 3\varphi - 5)}{6} \frac{\partial u_0}{\partial \xi}; \quad (6.21)$$

$$\lambda = \frac{[(2k+1)\pi]^2}{4\ell^2(1+m_1)} - \varepsilon^2 \frac{[(2k+1)\pi]^4 m_1^2}{192\ell^2(1+m_1)^3}, \text{ де } m_1 = \varepsilon^{-1}m. \quad (6.22)$$

3) 1D кусково-неперервна система.

В даному випадку задача зводиться до дисперсійного трансцендентного рівняння [57, 58]:

$$\cos(2\pi/R) = \cos\Omega \cos(\alpha\Omega) - B \sin\Omega \sin(\alpha\Omega), \quad (6.23)$$

$$\text{де } B = \frac{\beta^2 + 1}{2\beta}; \quad \Omega = \frac{\omega(1-c)d}{r_1}; \quad \alpha = \frac{cr_1}{(1-c)r_2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{E^m \rho^m}}{\sqrt{E^{in} \rho^{in}}}; \quad r_1 = \sqrt{\frac{E^m}{\rho^m}}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{E^{in}}{\rho^{in}}};$$

$R = L_v/d$ ;  $L_v$  – довжина хвилі;  $d$  – довжина комірки.

Для низькочастотних коливань висококонтрастних композитів з включеннями сумірної довжини має місце асимптотичне представлення [59]

$$\cos\left(\frac{2\pi}{R}\right) = \cos(\Omega_a \varepsilon_2 \alpha) - \frac{\Omega_a}{2} \sin(\Omega_a \varepsilon_2 \alpha) \quad (6.24)$$

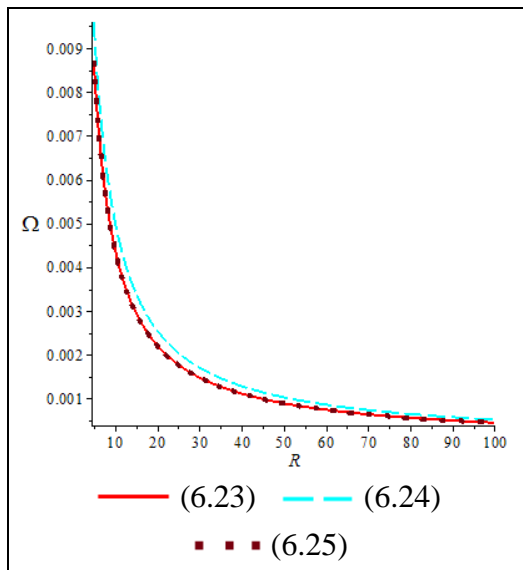


Рисунок 6.7 – Порівняння чисельного та асимптотичного розв'язків для випадку високої контрастності

і приблизна оцінка:

$$\Omega = 2 \sin\left(\frac{\pi}{R}\right) / \left( a \sqrt{1 + \frac{1}{2ba}} \right). \quad (6.25)$$

Подані на рис. 6.7 результати розрахунків вказують на достатню точність як асимптотики (6.24), так і приближної оцінки (6.25) для  $\alpha = 100$ ,  $\beta = 0,01$  щодо опису низькочастотних коливань висококонтрастних композитів з включеннями сумірної довжини.



**РОЗДІЛ 7**  
**ПРИКЛАДЕННЯ ТЕХНІКИ НЕГЛАДКОГО ПИЛКОПОДІБНОГО**  
**ПЕРЕТВОРЕННЯ АРГУМЕНТУ ДО РОЗВ'ЯЗКУ**  
**ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ**

**7.1. Поняття  $\tau$ -перетворення та його основні математичні співвідношення [9, 16, 17]**

За визначенням 4-періодична кусково-лінійна (пилкоподібна) функція  $\tau = \tau(x)$  описується на періоді співвідношеннями [48, 49]:

$$\tau(x) = \begin{cases} k_1 x & \text{при } -(1+\theta) \leq x \leq (1+\theta) \\ k_2(x-2) & \text{при } (1+\theta) \leq x \leq (3-\theta) \end{cases}, \quad (7.1)$$

де  $k_1 = 1/(1+\theta)$ ,  $k_2 = -1/(1-\theta)$ ,  $-1 \leq \theta \leq 1$ ,  $\theta$  – параметр, що характеризує нахил зубів «пили» (рис. 7.1).

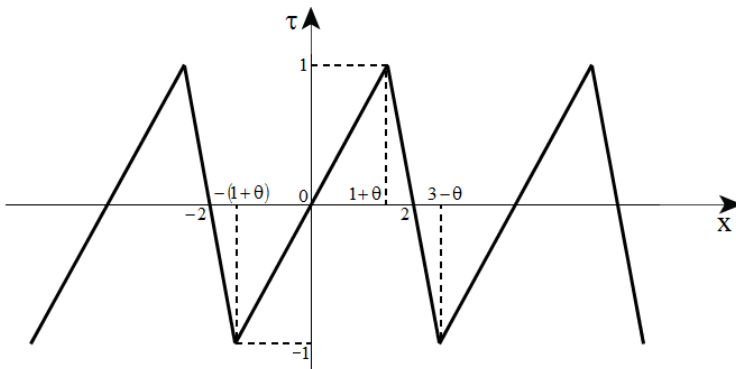


Рисунок 7.1 – Графік пилкоподібної функції  $\tau = \tau(x)$

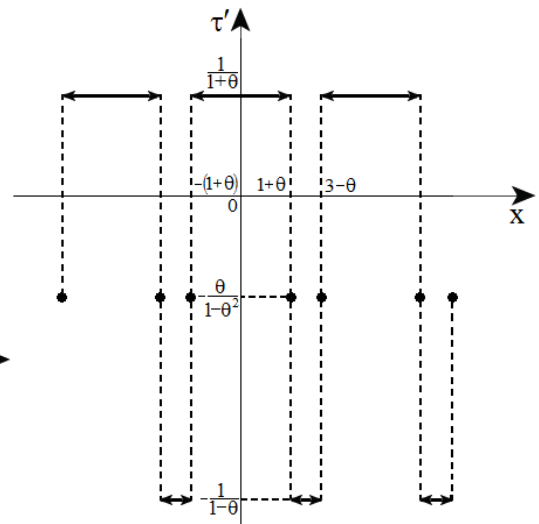


Рисунок 7.2 – Графік похідної пилкоподібної функції  $\tau'(x)$

Значення  $\theta = 0$  відповідає симетричній пилкоподібній функції [60].

Використання функції  $\tau = \tau(x)$  як нового аргументу дозволяє представити будь-яку неперервну 4а-періодичну функцію  $f(x)$  у вигляді:

$$f(x) = P(\tau) + Q(\tau) \cdot \tau', \text{ де } \tau = \tau(x/a); \quad (7.2)$$

$$P(\tau) = 0,5 \left\{ (1+\theta) f[(1+\theta)a\tau] + (1-\theta) f[(2-(1-\theta)\tau)a] \right\}; \quad (7.3)$$

$$Q(\tau) = 0,5(1-\theta^2) \left\{ f[(1+\theta)a\tau] - f[(2-(1-\theta)\tau)a] \right\}. \quad (7.4)$$

Сформулюємо властивості  $\tau$ -функції, вважаючи, що функція  $f(x)$  в (7.2) є 4-періодичною; для 4а-періодичних функцій слід замінити:  $\tau(x) \rightarrow a\tau(x/a)$ .

1) Функція  $\tau'(x)$  – похідна функції  $\tau(x)$  – має розриви першого роду в точках  $x: \tau(x) = \pm 1$ ; у цих точках функція не диференційована у класичному сенсі (рис. 7.2).

2) Похідна функції  $f(x)$  (7.2) визначається співвідношенням  $\frac{df}{dx} = P'\tau' + Q'\tau'^2 + Q\tau''$ , тобто містить сингулярний член  $Q\tau''$  – особливість типу  $\delta$ -функції Дірака, локалізовану в точках  $x: \tau(x) = \pm 1$ . При розгляді регулярних функцій сингулярний член слід виключити.

3) Вираз функції  $\tau'^2$  представляється у вигляді:

$$\tau'^2 = \begin{cases} 1/(1+\theta)^2 & \text{при } -(1+\theta) \leq x \leq (1+\theta) \\ 1/(1-\theta)^2 & \text{при } (1+\theta) \leq x \leq (3-\theta) \end{cases}, \quad (7.5)$$

$$\text{або } \tau'^2 = \Delta_1 + \Delta_2\tau', \text{ де } \Delta_1 = 1/(1-\theta^2); \Delta_2 = -2\theta/(1-\theta^2). \quad (7.6)$$

4) Використовуючи вираз для  $\tau'^2$  (7.6) знаходимо:  $\tau'\tau'' = -\theta/(1-\theta^2)\tau''$ . У разі симетричної пилкоподібної функції маємо:  $\tau'\tau'' = 0$ . З урахуванням отриманих співвідношень можна визначити значення похідної  $\tau'$  у кутових точках «пили»  $x: \tau(x) = \pm 1$  (рис. 7.2):

$$\tau' = \begin{cases} 1/(1+\theta) & \text{при } -(1+\theta) < x < 1+\theta \\ -\theta/(1-\theta^2) & \text{при } x = \pm(1+\theta), x = (3-\theta) \\ -1/(1-\theta) & \text{при } 1+\theta < x < 3-\theta \end{cases}. \quad (7.7)$$

## 7.2. Застосування техніки несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу до періодичних задач теорії пружності для шаруватих композитів [16]

Застосування методу пилкоподібного перетворення аргументу до розв'язку періодичних задач теорії пружності продемонстровано на прикладі задачі для двофазного шаруватого композитного масиву [61, 62]. Будемо вважати, що структура є періодичною, наприклад, у напрямку осі  $Ox$ , і її період достатньо малий у порівнянні з характерним розміром масиву.

За властивостями пилкоподібної функції (7.2)-(7.4) представимо коефіцієнти Ламе і масові сили, що діють на структуру, у вигляді єдиних аналітичних виразів, справедливих для всього шаруватого масиву:

$$\lambda^*(\tau) = \lambda(1 + \alpha\tau'); \mu^*(\tau) = \mu(1 + \beta\tau'); X^*(\tau) = X(1 + \gamma_x\tau'); (X \rightarrow Y \rightarrow Z), \quad (7.8)$$

де  $\tau = \tau(x/a)$ ;  $4a$  – період структури.

Розв'язок періодичної задачі представляється у вигляді:  
 $U(\tau) = U^{(1)}(\tau) + U^{(2)}(\tau)\tau'$ ;  $(U \rightarrow V \rightarrow W)$ .

Періодичні сингулярні члени виключаються за умов:

$$U^{(2)} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0; \left\{ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \tau} [(\lambda + 2\mu) + (\lambda\alpha + 2\mu\beta)(k_1 + k_2)] + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \tau} [(\lambda + 2\mu)(k_1 + k_2) + (\lambda\alpha + 2\mu\beta)(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)] \right\} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0; \quad (7.9)$$

$$V^{(2)} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0; \left\{ \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \tau} [1 + \beta(k_1 + k_2)] + \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \tau} [(k_1 + k_2) + \beta(k_1^2 + k_1k_2 + k_2^2)] \right\} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0; (V \rightarrow W).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при базисних елементах 1 та  $\tau'$ , отримуємо, що періодична задача теорії пружності для двофазного шаруватого композиту зводиться до крайових задач:

$$\frac{d^2U^{(1)}}{d\tau^2} = T_{U_1}^{(1)} X_1 + T_{U_1}^{(2)} X_2, \quad \frac{d^2U^{(2)}}{d\tau^2} = T_{U_2}^{(1)} X_1 + T_{U_2}^{(2)} X_2; \quad (7.10)$$

$$U^{(2)} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad \left\{ \frac{dU^{(1)}}{d\tau} T_{U_1} + \frac{dU^{(2)}}{d\tau} T_{U_2} \right\} \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad \text{де} \quad (7.11)$$

$$T_{U_1}^{(1)} = \frac{a^2 k_2}{(k_1 - k_2) k_1^2 (\lambda_1 + 2\mu_1)}; \quad T_{U_2}^{(1)} = -\frac{T_{U_1}^{(1)}}{k_2}; \quad T_{U_1}^{(2)} = T_{U_1}^{(1)}, \quad T_{U_2}^{(2)} = T_{U_2}^{(1)} \quad (1 \leftrightarrow 2); \quad (7.12)$$

$$T_{U_1} = k_1 (\lambda_1 + 2\mu_1) - k_2 (\lambda_2 + 2\mu_2), \quad T_{U_2} = k_1^2 (\lambda_1 + 2\mu_1) - k_2^2 (\lambda_2 + 2\mu_2). \quad (7.13)$$

$$U \rightarrow V (X_i \rightarrow Y_i, \lambda_i \rightarrow \lambda_i + 2\mu_i, i=1, 2); \quad V \rightarrow W (Y_i \rightarrow Z_i, i=1, 2). \quad (7.14)$$

Визначено умови самоурівноваженості масових сил на періоді:

$$\int_{-1}^1 X^{(1)}(\tau) d\tau = 0; \quad (X \rightarrow Y \rightarrow Z) \quad \text{та умови виключення із періодичного розв'язку}$$

$$\text{«повільної» (середньої) складової:} \quad \int_{-1}^1 U^{(1)}(\tau) d\tau = 0; \quad (U \rightarrow V \rightarrow W).$$

Графіки переміщення  $V(\tau)$  на періоді залежно від різних співвідношень геометричної та жорсткої характеристик фаз композиту представлені на рис. 7.3 ( $\theta$  визначає геометричну характеристику композиту,  $\mu_1, \mu_2$  – жорсткісну, за допомогою  $r_1, r_2$  задаються масові сили).

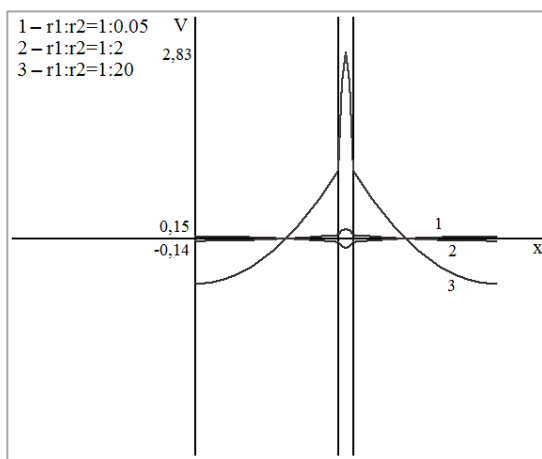


Рисунок 7.3 – Графіки переміщення  $V(\tau)$  при  $\theta = 0,9, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0,05$

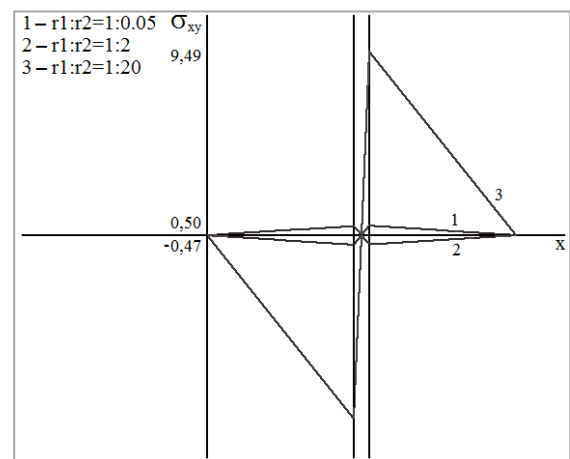


Рисунок 7.4 – Графіки напруги  $\sigma_{xy}$  при  $\theta = 0,9, \mu_1 = 1, \mu_2 = 20$

Напруга  $\sigma_{xy}$  визначається співвідношенням (рис. 7.4):

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & -\frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2} \left[ (\mu_1 - \mu_2) \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \tau} + (\mu_1 k_1 - \mu_2 k_2) \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \tau} \right] + \\ & + \frac{1}{k_1 - k_2} \left[ (\mu_1 k_1 - \mu_2 k_2) \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \tau} + (\mu_1 k_1^2 - \mu_2 k_2^2) \frac{\partial V^{(2)}}{\partial \tau} \right] \tau'. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Розглянуто граничні випадки крайових задач (7.10)-(7.14) й отримано асимптотики залежно від жорсткісних і геометричних характеристик композиту.

### 7.3. Дослідження нелінійного осцилятора при параметричному імпульсному збудженні з використанням $\tau$ -перетворення за часом [17]

Розглядається осцилятор Дюффінга при параметричному імпульсному впливі:

$$\ddot{x} + \left[ p + q \frac{\partial e(t, \theta)}{\partial t} \right] x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (7.16)$$

де  $\varepsilon \ll 1$  – малий параметр;  $p$  і  $q$  – постійні параметри; параметричний імпульсний вплив описується співвідношенням:

$$\frac{\partial e(t, \theta)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tau(t, \theta)}{\partial t^2} = \frac{2}{1 - \theta^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \delta(t + 1 + \theta - 4k) - \delta(t - 1 - \theta - 4k) \right]. \quad (7.17)$$

З використанням  $\tau$ -перетворення за часом періодичний розв'язок з періодом  $T = 4$  представляється виразом:  $x(t) = X(\tau) + Y(\tau)e$ , де  $e = \partial \tau(t, \theta) / \partial t$ .

Тоді рівняння (7.16) перетворюється до вигляду:

$$\begin{aligned} & \left[ (1 - \theta^2) X'' - 2\theta Y'' + (1 - \theta^2)^2 pX + \varepsilon (1 - \theta^2)^2 R_f \right] + \\ & + \left[ (1 + 3\theta^2) Y'' - 2\theta (1 - \theta^2) X'' + (1 - \theta^2)^2 pY + \varepsilon (1 - \theta^2)^2 I_f \right] e = 0, \text{ де} \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$I_f = 3X^2 Y - \frac{6\theta}{1 - \theta^2} XY^2 + \frac{1 + 3\theta^2}{(1 - \theta^2)^2} Y^3; \quad R_f = X^3 + \frac{3}{1 - \theta^2} XY^2 - \frac{2\theta}{(1 - \theta^2)^2} Y^3. \quad (7.19)$$

Сингулярні члени в (7.18) виключені прийняттям умов:

$$Y \Big|_{\tau=\pm 1} = 0; \quad (X' + qX) \Big|_{\tau=\pm 1} = [2\theta Y' + \theta^2 (X' + qX)] \Big|_{\tau=\pm 1}. \quad (7.20)$$

Прирівнюючи нулю кожен із виразів у квадратних дужках (7.18), отримуємо систему рівнянь відносно  $X$ - і  $Y$ -компонентів розв'язку:

$$(1 - \theta^2)X'' - 2\theta Y'' + (1 - \theta^2)^2 pX = -\varepsilon(1 - \theta^2)^2 R_f; \quad (7.21)$$

$$(1 + 3\theta^2)Y'' - 2\theta(1 - \theta^2)X'' + (1 - \theta^2)^2 pY = -\varepsilon(1 - \theta^2)^2 I_f. \quad (7.22)$$

Таким чином, розв'язок вихідного рівняння руху (7.16) звівся до розв'язку крайової задачі (7.20)-(7.22) в області  $-1 \leq \tau \leq 1$ . В такому вигляді система не містить сингулярних функцій. Імпульсний вплив фігурує як член з коефіцієнтом  $q$  у граничній умові (7.20).

#### 7.4. Асимптотичний і точний розв'язки задачі: чисельний аналіз та порівняння результатів [17]

1) Для побудови асимптотичного розв'язку представлено функції  $X$ ,  $Y$  і параметр  $p$  у вигляді асимптотичних рядів за степенями малого параметра  $\varepsilon$ .

Розв'язки задач нульового та першого наближень

$$\varepsilon^0: X_0'' + \lambda^2 X_0 = 0, \quad Y_0'' + \lambda^2 Y_0 = 0; \quad (X_0' + qX_0) \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad Y_0 \Big|_{\tau=\pm 1} = 0; \quad (7.23)$$

$$\varepsilon^1: X_1'' + \lambda_j^2 X_1 = 2\theta Y_0'' - p_1 X_{0j} - X_{0j}^3 - 3X_{0j} Y_{0j}^2, \quad (7.24)$$

$$Y_1'' + \lambda_j^2 Y_1 = 2\theta X_0'' - p_1 Y_{0j} - Y_{0j}^3 - 3Y_{0j} X_{0j}^2; \quad Y_1 \Big|_{\tau=\pm 1} = 0, \quad (X_1' + qX_1) \Big|_{\tau=\pm 1} = 2\theta Y_{0j}' \Big|_{\tau=\pm 1} \quad (7.25)$$

приводять до співвідношень:

$$A_0 = \pm C_0 = A; \quad p = \lambda_j^2 - \varepsilon \left( \pm \frac{2\theta \lambda_j^2 q}{\sqrt{q^2 + \lambda_j^2}} + 3 \frac{2q^2 + \lambda_j^2}{q^2 + \lambda_j^2} A^2 \right) + O(\varepsilon^2). \quad (7.26)$$

Відповідні періодичні розв'язки отримуємо у вигляді:

$$x = A \left[ \sqrt{\frac{2}{q^2 + \lambda_j^2}} (q \cos \lambda_j \tau + \lambda_j \sin \lambda_j \tau) \pm e\sqrt{2} \cos \lambda_j \tau \right] + O(\varepsilon); \lambda_j = j\frac{\pi}{2}, j=1, 3, 5, \dots; \quad (7.27)$$

$$x = A \left[ \sqrt{\frac{2}{q^2 + \lambda_j^2}} (\lambda_j \cos \lambda_j \tau - q \sin \lambda_j \tau) \pm e\sqrt{2} \sin \lambda_j \tau \right] + O(\varepsilon); \lambda_j = j\pi, j=1, 2, 3, \dots \quad (7.28)$$

2) Між точками локалізації імпульсів рівняння (7.16) допускає точний розв'язок в термінах спеціальних функцій Якобі [47]. У припущенні  $\theta = 0$  із (7.20)-(7.22) отримуємо крайову задачу, що має лише X-компоненту, розв'язок якої записується через функції Якобі у вигляді:

$$X = \alpha \operatorname{cn}(u\tau + v|m) = 0; \quad (7.29)$$

$$u = (2n+1)K(m); \quad p = (2n+1)^2 K^2(m) - \varepsilon\alpha^2, \quad n=0, 1, 2, \dots; \quad (7.30)$$

$$u = 2nK(m); \quad p = 4n^2 K^2(m) - \varepsilon\alpha^2, \quad n=1, 2, \dots, \quad (7.31)$$

де  $K(m)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду [47];  $\alpha^2 = \frac{1}{\varepsilon}(u^2 - \lambda_j^2) + \frac{3}{2}A_0^2$ .

Наведені на рис. 7.5 графіки точного та асимптотичного розв'язків підтверджують їх достатньо хорошу відповідність.

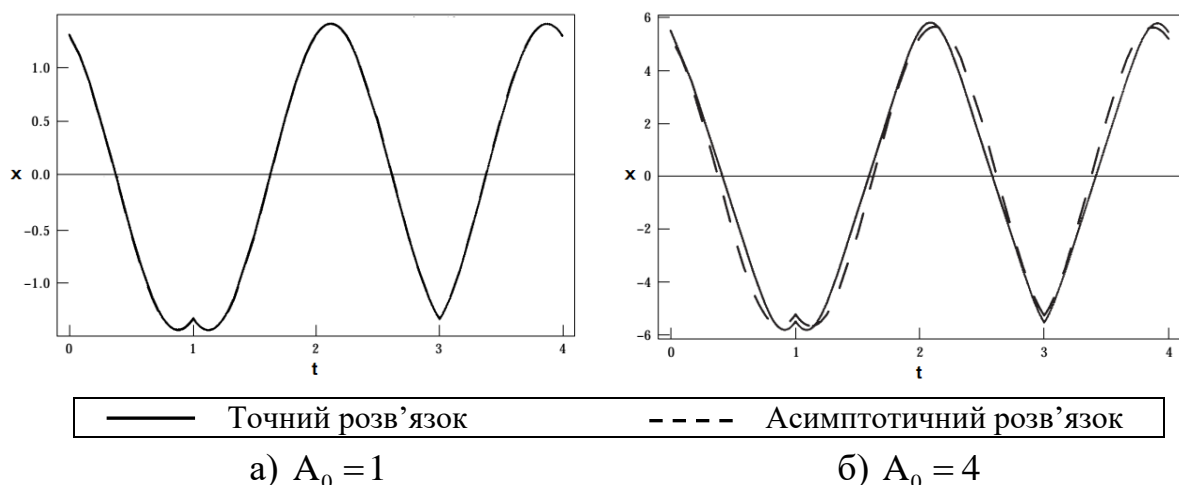


Рисунок 7.5 – Точний періодичний розв'язок у термінах функцій Якобі та асимптотичний розв'язок;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $q = 1,3$ ;  $p = 1$ ;  $\lambda_j = \pi$ ;  $u = 2K(m)$

## РОЗДІЛ 8

## МОДЕЛІ КОНТИНУАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

## 8.1. Чисельне дослідження моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів [18]

Досліджується поширення хвилі в нескінченному дискретному ланцюжку, що складається з матеріальних точок з масами  $M$ , які знаходяться в точках осі  $x$  з координатами  $jh$ ,  $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  і з'єднані пружинами жорсткості  $c$  (рис. 8.1). В момент часу  $\tau=0$  одинична сила діє на масу з номером  $0$  у напрямку осі  $x$ .

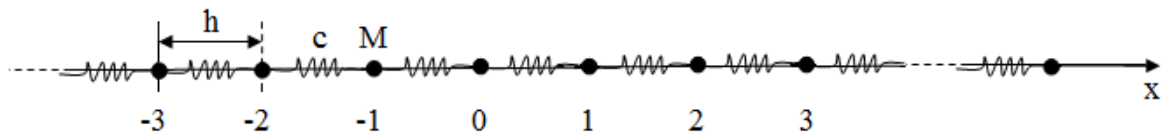


Рисунок 8.1 – Нескінченний ланцюжок мас

Точний розв'язок дискретної задачі, з яким далі проводитиметься порівняння при оцінці різних континуальних апроксимацій, описує швидкість поширення хвилі в дискретному середовищі співвідношенням [63]:

$$\frac{1}{\pi} V_d(j, \tau) = \frac{dz_j(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau \sin x)}{\sin x} \cos(2jx) dx. \quad (8.1)$$

Досліджуються моделі континуальної апроксимації: класична [64], проміжна [65], квазіконтинуальна [66, 67], уточнена квазіконтинуальна [68, 69].

Проведено порівняльний аналіз швидкостей поширення хвиль для:

– класичної континуальної апроксимації  $V_{cc}(\xi, \tau)$ :

$$\frac{1}{\pi} V_{cc}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau x)}{x} \cos(2\xi x) dx = \frac{1}{2\pi} [\text{Si}(\pi(\xi + \tau)) - \text{Si}(\pi(\xi - \tau))]; \quad (8.2)$$

– проміжної континуальної моделі  $V_{ci}(\xi, \tau)$ :



$$\frac{1}{\pi} V_{ci}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau x \alpha)}{x \alpha} \cos(2\xi x) dx, \alpha = \sqrt{1 - 1/3 x^2 + 2/45 x^4}; \quad (8.3)$$

– квазіконтинуальної апроксимації  $V_{qc}(\xi, \tau)$ :

$$\frac{1}{\pi} V_{qc}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau x \alpha)}{x \alpha} \cos(2\xi x) dx, \alpha = (1 + 1/3 x^2)^{-1/2}. \quad (8.4)$$

– уточненої квазіконтинуальної моделі  $V_{qci}(\xi, \tau)$ :

$$\frac{1}{\pi} V_{qci}(\xi, \tau) = \frac{\partial z(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\tau \alpha)}{x \alpha} \cos(2\xi x) dx, \alpha = (1 + (1 - 4\pi^{-2}) x^2)^{-1/2}. \quad (8.5)$$

Результати чисельного моделювання представлені на рис. 8.2-8.5.

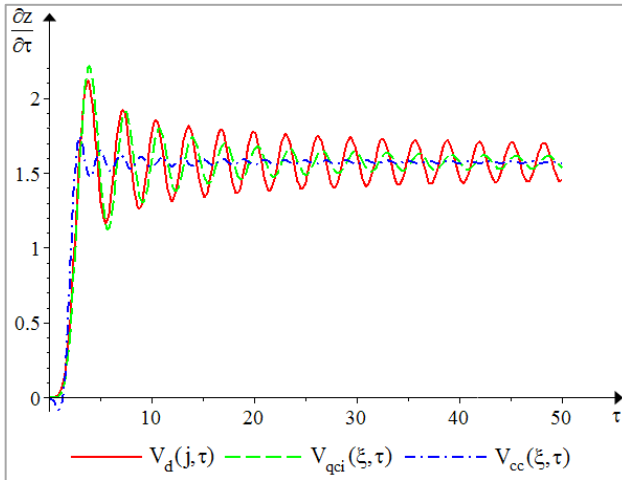


Рисунок 8.2 – Швидкість поширення хвиль при  $\xi = 2,0$

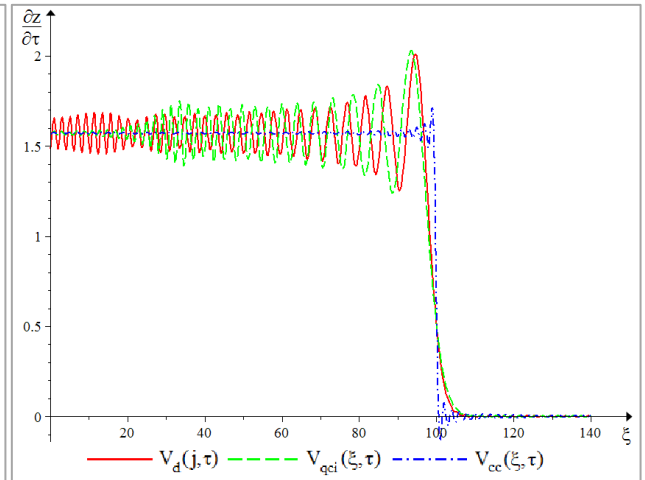


Рисунок 8.3 – Швидкість поширення хвиль при  $\tau = 100,0$

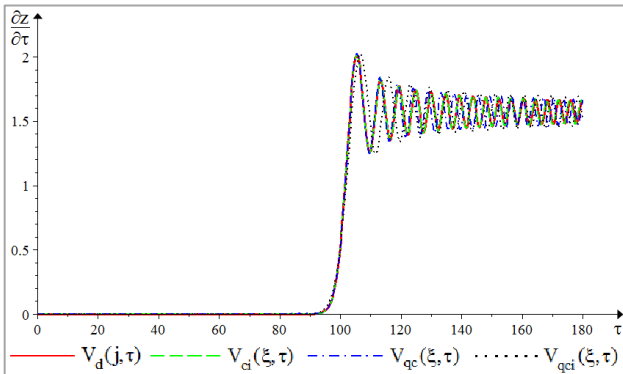


Рисунок 8.4 – Швидкість поширення хвиль при  $\xi = 100,0$

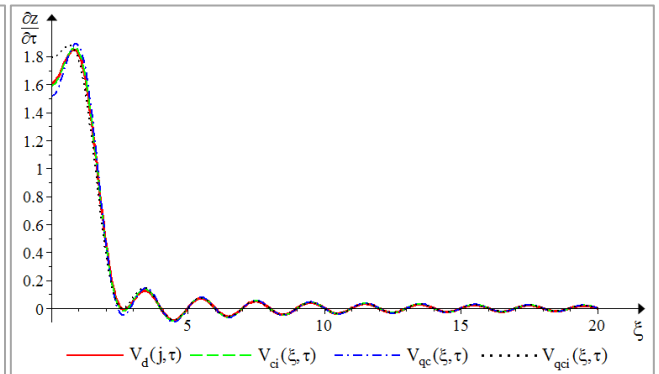


Рисунок 8.5 – Швидкість поширення хвиль при  $\tau = 2,0$

Чисельні розрахунки показують, що всі розглянуті вище нелокальні теорії на якісному рівні достатньо добре описують поширення хвиль у дискретних середовищах, але класична континуальна апроксимація з кількісної точки зору не дає задовільних результатів. Недоліком проміжної континуальної моделі є високий порядок диференціального рівняння, що зумовлює необхідність формулювання граничних умов, які природно не впливають з фізичного змісту задачі. Квазиконтинуальне наближення дає результати, практично ідентичні отриманим на основі уточненого квазиконтинуального наближення.

## 8.2. Перехід від дискретного до неперервного середовища: вплив зміни симетрії на асимптотичну поведінку хвиль [19]

Розглядається решітка Лагранжа – система точок з масами  $M$  в точках осі  $x$  з координатами  $jh$  ( $j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ), які з'єднані пружними пружинами жорсткості  $c$  (рис. 8.1). В момент часу  $t = 0$  всі маси в решітці перебувають у спокої, за винятком єдиної маси в точці  $x = 0$ , яка має переміщення 1.

Розв'язок дискретної задачі записується у вигляді [70]:

$$y_m(t) = J_{2m}(2t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \cos \left[ 2t \sin \left( \frac{qh}{2} \right) \right] \cos(mhq) dq, \quad (8.6)$$

де  $J_{2m}(2t)$  – функція Бесселя першого роду цілого порядку  $2m$  [47].

Використання класичної неперервної апроксимації приводить до виразу:

$$u(x, t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \cos(qht) \cos(qx) dq = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\pi(t - x/h))}{t - x/h} + \frac{\sin(\pi(t + x/h))}{t + x/h} \right]. \quad (8.7)$$

Порівняння розв'язків по дискретній (8.6) та неперервній (8.7) моделям показують, що збіг тут, у кращому разі, на якісному рівні (рис. 8.6, 8.7).

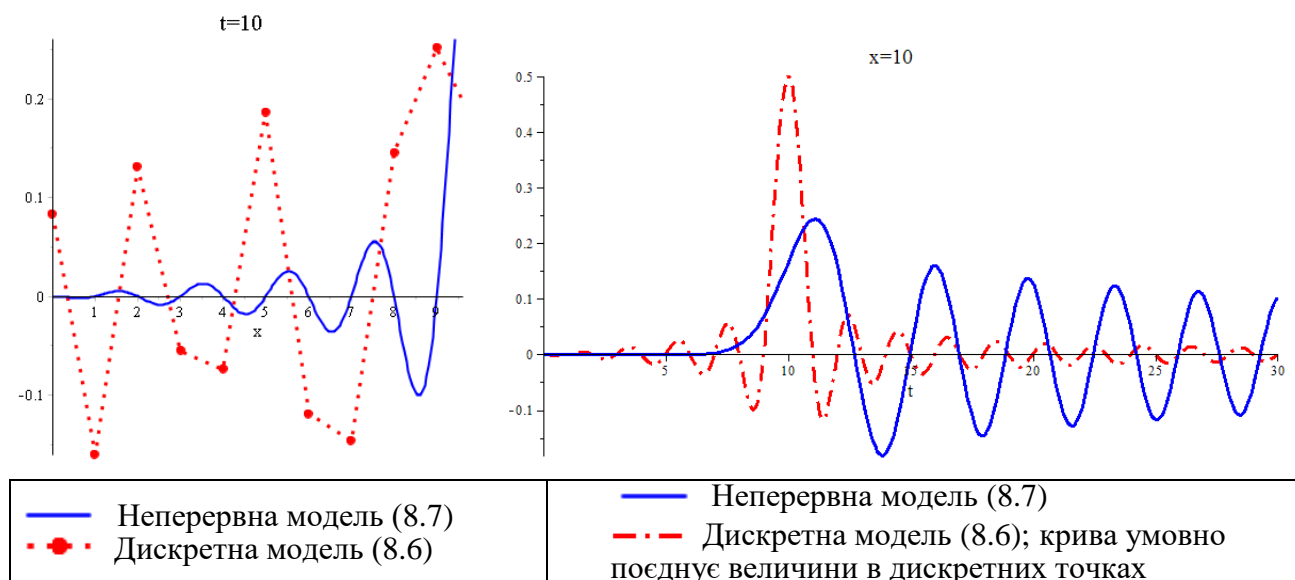


Рисунок 8.6 – Порівняння розв’язків за дискретною і неперервною моделями при  $t = 10$

Рисунок 8.7 – Порівняння розв’язків за дискретною і неперервною моделями для  $x = m, m = [10/h]$

Для покращення неперервної моделі хвильового руху решітки скористаємось апаратом АП, представивши:

$$u(u, t) = \frac{h}{\pi} \int_0^{\pi/h} \cos[2tPA(q)] \cos(mhq) dq, \quad (8.8)$$

$$\text{де } PA(z) = \frac{hz\sqrt{1-\beta_{R1}^2 h^2 z^2 + \beta_{R2}^2 h^4 z^4}}{2\sqrt{1+\beta_{L1}^2 h^2 z^2 + \beta_{L2}^2 h^4 z^4}}; \beta_{L1}^2 = \frac{\pi^2 - 8}{4\pi^2} \approx 0,04736; \quad (8.9)$$

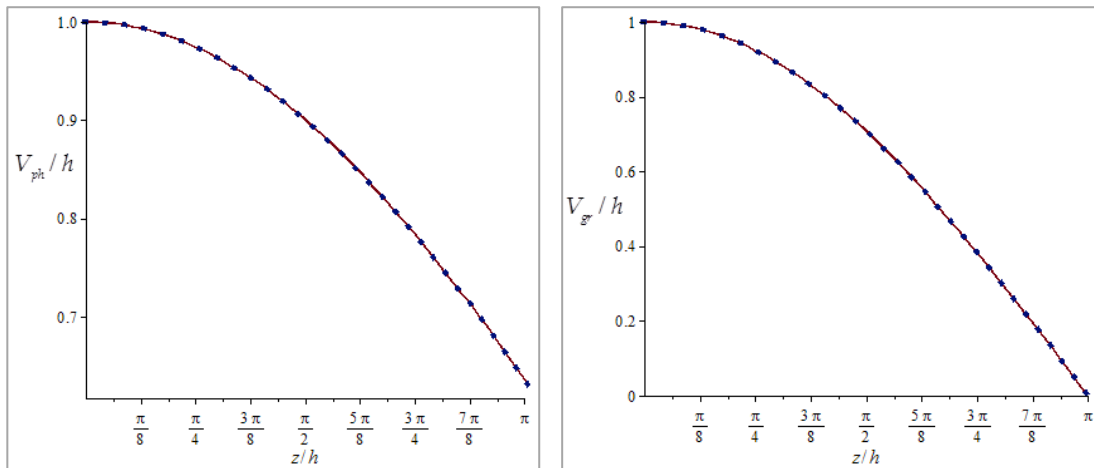
$$\beta_{L2}^2 = (\pi^4 - 12\pi^2 + 24)/(24\pi^4) \approx 0,00763, \beta_{R1}^2 = (12 - \pi^2)/(6\pi^2) \approx 0,01389, \beta_{R2}^2 = 0.$$

Фазова та групова швидкості неперервного наближення мають вигляд:

$$V_{ph}^{(1)} = F_1(z), \text{ де } F_1(z) = h \frac{\sqrt{1-\beta_{R1}^2 h^2 z^2 + \beta_{R2}^2 h^4 z^4}}{\sqrt{1+\beta_{L1}^2 h^2 z^2 + \beta_{L2}^2 h^4 z^4}}; \quad (8.10)$$

$$V_{gr}^{(1)} = F_1(z) \left[ 1 + h^2 z^2 \frac{-(\beta_{L1}^2 + \beta_{R1}^2) - 2(\beta_{L2}^2 - \beta_{R2}^2) h^2 z^2 + (\beta_{L1}^2 \beta_{R2}^2 + \beta_{L2}^2 \beta_{R1}^2) h^4 z^4}{(1 + \beta_{L1}^2 h^2 z^2 + \beta_{L2}^2 h^4 z^4)(1 - \beta_{R1}^2 h^2 z^2 + \beta_{R2}^2 h^4 z^4)} \right]. \quad (8.11)$$

На рис. 8.8, 8.9 проілюстровано у порівнянні фазову й групову швидкості дискретної моделі [64, 71] та її знайденого неперервного наближення. Результати для дискретних та неперервних моделей практично збігаються.



— Неперервна модель (8.10), (8.11) ■ ■ ■ Дискретна модель (8.6)

Рисунок 8.8 – Порівняння фазових швидкостей для неперервної та дискретної моделей

Рисунок 8.9 – Порівняння групових швидкостей для неперервної та дискретної моделей

З розв'язку дискретної задачі (8.6) видно, що при довільному малому  $t$  всі маси починають переміщатися. Зміщення  $m$ -ої маси швидко зменшується зі збільшенням  $m$ , як показує головний член розкладання в ряд Маклорена функції Бесселя [47]:

$$y_m(t) = J_{2m}(2t) \sim \frac{t^{2m}}{\Gamma(2m+1)}, \text{ де } \Gamma(2m+1) \text{ – гама-функція.} \quad (8.12)$$

Асимптотику початкового руху отримаємо з виразу (8.8), розклавши підінтегральну функцію в ряд Маклорена і залишивши його перший член:

$$u(x, t) \sim \frac{h^3 t^2}{\pi} \int_0^{\pi/h} \frac{1 - \beta_3(hq)^2 + \beta_4(hq)^4}{1 + \beta_1(hq)^2 + \beta_2(hq)^4} \cos(xq) dq. \quad (8.13)$$

Порівняння обчислень за формулами (8.13) і (8.12) для функцій  $u^*(x) = u(x, t)/t^2$  та  $y^*(m, t) = y_{2m}(2t)/t^2$  представлені на рис. 8.10, 8.11.

Таким чином, використання неперервних моделей, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних низького порядку, дозволяє отримати коректну кількісну апроксимацію поведінки дискретної системи при великих  $t$  і фіксованому  $x$ , а також поблизу квазіфронту. Показано хорошу відповідність опису хвильового руху дискретної решітки за неперервною моделлю, побудованою з використанням АП.

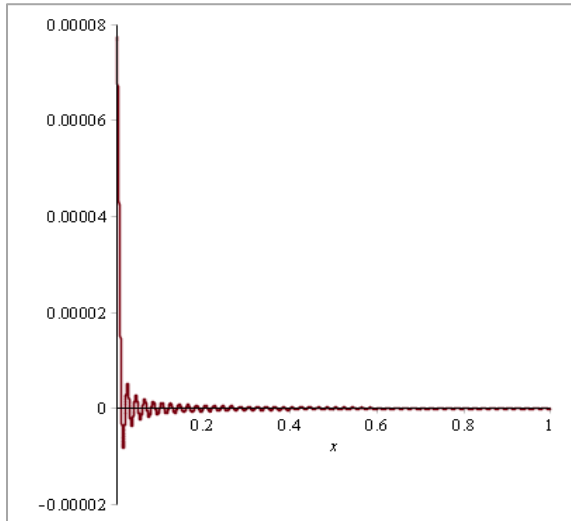


Рисунок 8.10 – Функція  $u^*(x)$   
при  $h = 0,01$

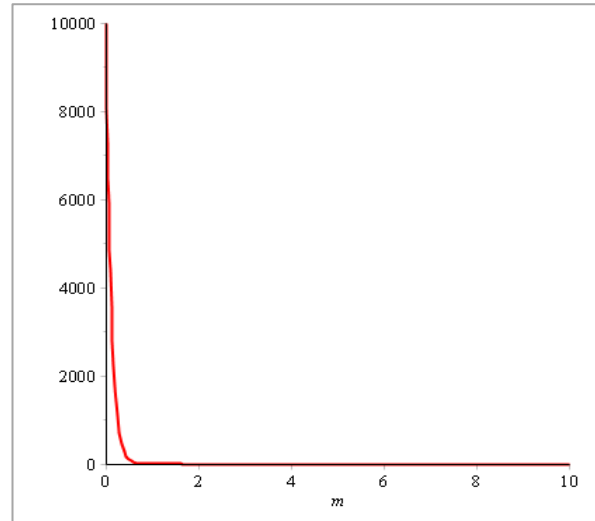


Рисунок 8.11 – Функція  $y^*(m, t)$   
при  $t = 0,01$ . Крива умовно поєднує  
величини в дискретних точках

### 8.3. Апроксимація функції Гріна решітки Лагранжа неперервними аналогами [20]

Розглядається питання апроксимації дискретної функції Гріна решітки Лагранжа неперервними аналогами [64, 72, 73]. Показано, що класичне неперервне наближення  $G_c$  дає задовільні результати лише для низьких частот. Значно підвищити точність апроксимації при збереженні порядку рівняння в частинних похідних можна з використанням апарату двохточкових АП [58, 66, 69, 74, 75], за яким функція Гріна набуває вигляду:

$$G_{c1} = \frac{i}{2\omega} \exp\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\alpha^2\omega^2}} i|\xi|\right), \text{ де } \omega - \text{частота.} \quad (8.14)$$

Застосовуваний метод може бути використаним і для побудови моделей вищого порядку. Для апроксимації, яка включає похідні четвертого порядку за просторовою змінною, аналітичний вираз функції Гріна визначається у вигляді:

$$G_{c2} = \frac{i}{2\omega} \exp(\Omega i|\xi|), \text{ де } \Omega = \frac{\pi\sqrt{B+C}}{A}; \quad A = 2[(10-\pi^2)\omega^2 + 4\pi^2 - 36]; \quad (8.15)$$

$$B = -\frac{A}{\sqrt{2}}[(\pi^2 - 8)\omega^2 - 4\pi^2]; \quad C = [(\pi^4 + 48\pi^2 - 576)\omega^4 - (8\pi^4 + 192\pi^2 - 2304)\omega^2 + 16\pi^4]^{1/2}.$$

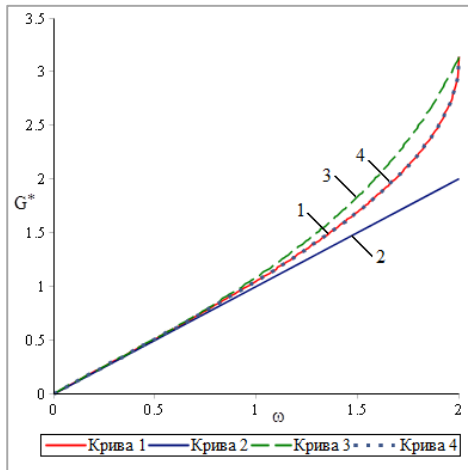


Рисунок 8.12 – Функції Гріна решітки Лагранжа для дискретної моделі і різних неперервних наближень

На рис. 8.12 криві 1 і 2 показують відповідно результати розрахунку за дискретною моделлю та класичним неперервним наближенням. Криві 3 і 4 ілюструють відповідно функції  $2\omega G_{c1}/i$  та  $2\omega G_{c2}/i$  й показують значне покращення апроксимації порівняно з класичним неперервним випадком.

#### 8.4. Про концепцію зосереджених сил у середовищах з мікроструктурою [20]

Розв'язки класичної теорії пружності поблизу точок прикладення зосереджених навантажень можуть мати сингулярності, для усунення яких використовують перехід до різних варіантів градієнтної теорії пружності. Однак за такого підходу регуляризація приводить до підвищення порядку вихідної системи й отримані за допомогою градієнтних теорій пружності вирази надто складні.

Запропоновано регуляризацію розв'язку шляхом зміни поняття зосередженої сили, а саме, заміною  $\delta$ -функції Дірака інтерполяційною функцією Уїттакера – Шеннона – Котельникова [76-78]. У цьому випадку використовується тільки один додатковий параметр, який характеризує мікрогетерогенність середовища.

Розглянуто аналог задачі Фламана [79]. Знайдений з використанням комплексного аналізу [80] розв'язок не має особливостей і наближається до класичного при наближенні параметра мікронеоднорідності до нуля:

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left\{ -\text{Im} B + \frac{2xy}{x^2 + y^2} + 2 \exp(\pi y/\ell) \frac{y^2 \sin(\pi x/\ell) - xy \cos(\pi x/\ell)}{x^2 + y^2} \right\} + \quad (8.16)$$

$$+ \frac{P}{4\pi G} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n+1} (\kappa - 1) \cos((2n+1)\theta)}{(2n+1)(2n+1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n} (\kappa - 1) \sin(2n\theta)}{(2n)(2n)!} \right\};$$

$$v = \frac{P}{4\pi G} \left\{ \operatorname{Re} B - 1 + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} - 2 \exp(\pi y/\ell) \frac{y^2 \cos(\pi x/\ell) + xy \sin(\pi x/\ell)}{x^2 + y^2} \right\} + \quad (8.17)$$

$$+ \frac{P}{4\pi G} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n+1} (\kappa + 1) \sin((2n+1)\theta)}{(2n+1)(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\pi \rho/\ell)^{2n} (\kappa + 1) \cos(2n\theta)}{(2n)(2n)!} \right\},$$

де  $B = 1 - (\kappa + 1)[\operatorname{Ci}(\pi/\ell) - \gamma - \ln(\pi/\ell)]$ ,  $\operatorname{Ci}(\pi/\ell)$  – інтегральний косинус [47].

На рис. 8.13 надано порівняння розв'язків задачі Фламана для  $u(x,0)$  і  $v(x,0)$  з розв'язками (8.16), (8.17) при різних значеннях параметра мікронеоднорідності.

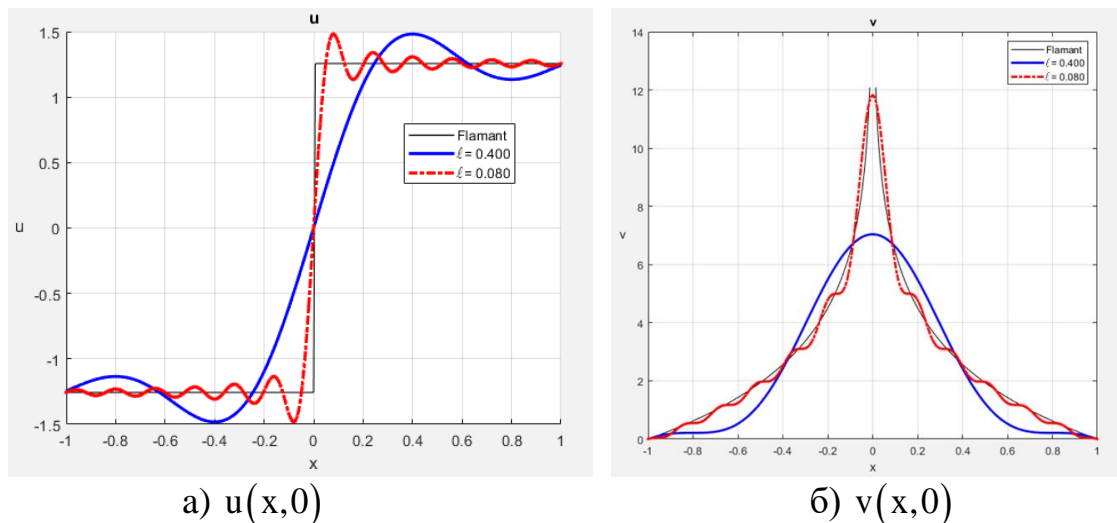


Рисунок 8.13 – Порівняння розв'язків задачі Фламана для  $u(x,0)$ ,  $v(x,0)$  з розв'язками (8.16), (8.17) при різних значеннях параметра мікронеоднорідності

Поведінка розв'язків (8.16), (8.17) на нескінченності збігається з поведінкою розв'язків задачі Фламана. Отримані формули мають більш простий вигляд порівняно зі знайденими за градієнтною теорією пружності.

## 8.5. Континуальні моделі дискретного рівняння Ферхюльста [21]

Мета дослідження акцентована на континуалізації різницевого рівняння таким чином, щоб отримане звичайне диференціальне рівняння мало хаотичний розв'язок. Запропонований підхід проілюстровано на прикладі логістичного рівняння [81, 82].

Різницеве рівняння  $x_{n+1} - x_n = R x_n (1 - x_n)$  після введення неперервної координати і розкладення в ряд Маклорена зводиться до диференціального рівняння 3-го порядку, яке описує повністю детерміновані траєкторії.

Перетворення різницевого рівняння після заміни змінних і розкладення в ряд Маклорена на звичайне диференціальне рівняння 5-го порядку

$$h \frac{d}{dt} \left[ 1 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{h^3}{24} \frac{d^3}{dt^3} + \frac{h^4}{120} \frac{d^4}{dt^4} \right] y = -Ry(1+y). \quad (8.18)$$

теж приводить до детермінованих траєкторій.

Оскільки стандартна континуалізація, заснована на рядах Маклорена, очікувано не забезпечує бажаного результату, було розроблено процедуру континуалізації, засновану на перебудові диференціального оператора у квадратних дужках виразу (8.18) в діагональну АП [2/2]:

$$1 + \frac{h}{2} \frac{d}{dt} + \frac{h^2}{6} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{h^3}{24} \frac{d^3}{dt^3} + \frac{h^4}{120} \frac{d^4}{dt^4} = \frac{1}{3} \frac{h^2 \frac{d^2}{dt^2} + 6h \frac{d}{dt} + 60}{h^2 \frac{d^2}{dt^2} - 8h \frac{d}{dt} + 20}; \quad (8.19)$$

$$h^3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 3h^2 (2 + R(1 + 2y)) \frac{d^2 y}{dt^2} + 12h(5 - 2R) \frac{dy}{dt} - 48hRy \frac{dy}{dt} + 6Rh^2 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 60Ry(y + 1) = 0. \quad (8.20)$$

Початкові умови для рівняння (8.20) мають вигляд:

$$\text{при } t = 0: y = \alpha; \frac{dy}{dt} = -\frac{R\alpha(1+\alpha)}{h}; \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{R^2 \alpha(1+\alpha)(\alpha + (1+\alpha)(1-R\alpha))}{h^2}. \quad (8.21)$$

## 8.6. Хаос у неперервній моделі: чисельний аналіз [18]

Чисельне інтегрування задачі Коші (8.20), (8.21) виконувалося методом Адамса – Башфорта – Моултона (метод предиктора-коректора). Отримані результати можна розділити на три групи, що описують: періодичні коливання; періодичні коливання із субгармоніками; хаотичні коливання.

1) При  $2,5 \leq R \leq 2,88$  в системі відбуваються періодичні коливання. На рис. 8.14 показано, що чисельний розв'язок задачі Коші (8.20), (8.21) при  $R = 2,86$



описує періодичні коливання. На рис. 8.15 показані фазова траєкторія та переріз Пуанкаре. Траєкторії у тривимірному просторі зображені на рис. 8.16. На рис. 8.17 проілюстровано, що незначна зміна початкових умов для функції  $y$  призводить до незначної зміни розв'язку.

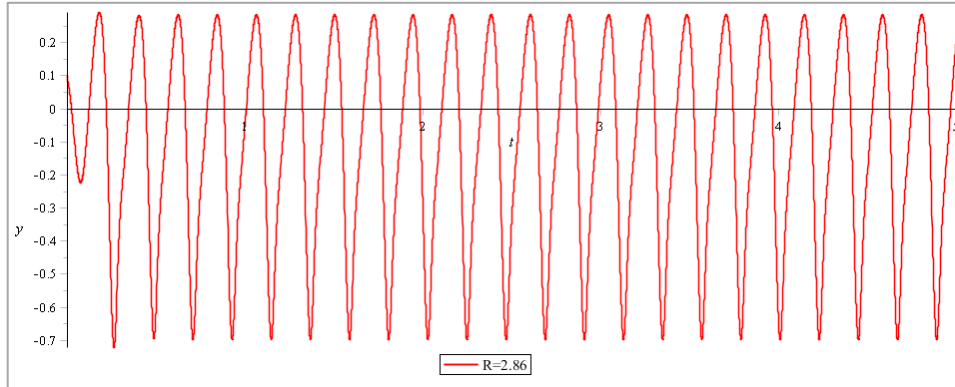


Рисунок 8.14 – Чисельний розв'язок задачі Коші (8.20), (8.21) при  $R = 2,86$ : періодичні коливання

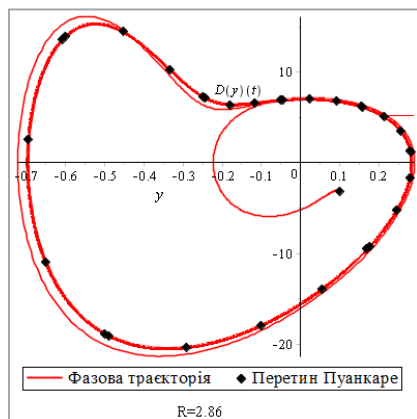


Рисунок 8.15 –  $R = 2,86$ : фазова траєкторія, перетин Пуанкаре

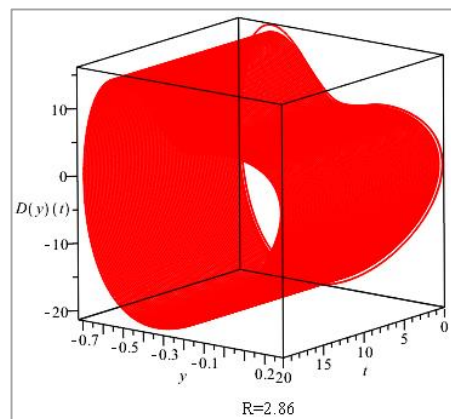


Рисунок 8.16 –  $R = 2,86$ : траєкторії у тривимірному просторі

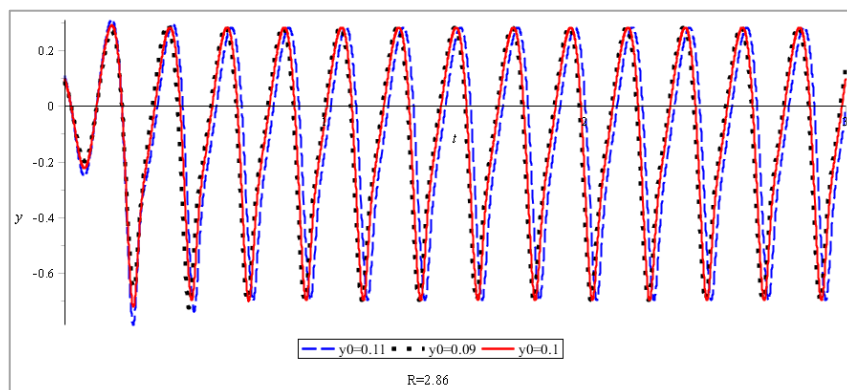


Рисунок 8.17 – Чисельний розв'язок задачі (8.20), (8.21) при  $R = 2,86$ : незначна зміна початкових умов для функції  $y$  призводить до незначної зміни розв'язку

2) При  $2,88 < R \leq 3,0$  в періодичному розв'язку вже виникають субгармоніки; при незначних змінах початкових умов для функції  $y$  характер коливань системи не зазнає істотних змін (рис. 8.18-8.21).

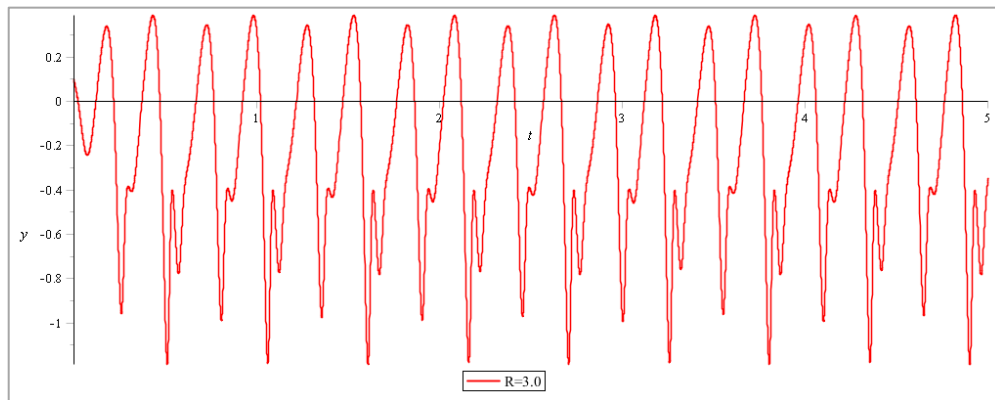


Рисунок 8.18 – Чисельний розв'язок задачі Коші (8.20), (8.21) при  $R = 3,0$ : поява субгармонік у періодичних коливаннях



Рисунок 8.19 –  $R = 3,0$ : фазова траєкторія, перетин Пуанкаре

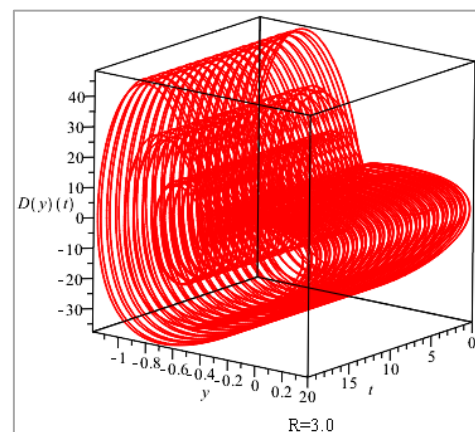


Рисунок 8.20 –  $R = 3,0$ : траєкторії у тривимірному просторі

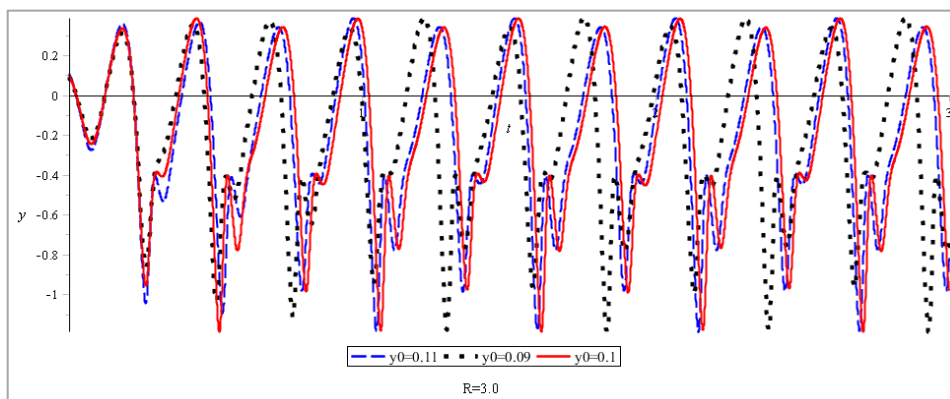


Рисунок 8.21 – Чисельний розв'язок задачі Коші (8.20), (8.21) при  $R = 3,0$ : при незначній зміні початкових умов характер коливань не зазнає суттєвих змін

3) При  $R > 3,0$  система стає хаотичною; незначні зміни початкових умов призводять до суттєвих змін характеру її коливань (рис. 8.22-8.25). У той самий час структура фазових траєкторій, якщо виключити точки, які відповідають початковому режиму встановлення коливань, не залежить від початкових умов (рис. 8.26, 8.27).

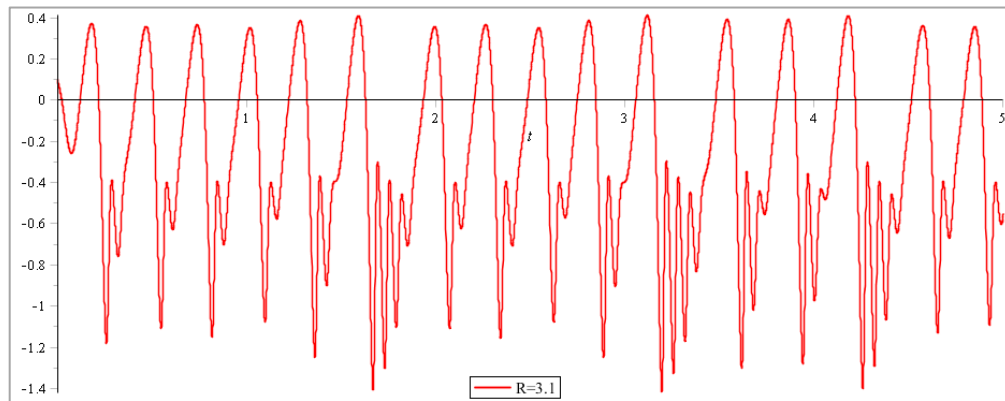


Рисунок 8.22 – Хаотичні коливання при  $R = 3,1$



Рисунок 8.23 –  $R = 3,1$ : фазова траєкторія, перетин Пуанкаре

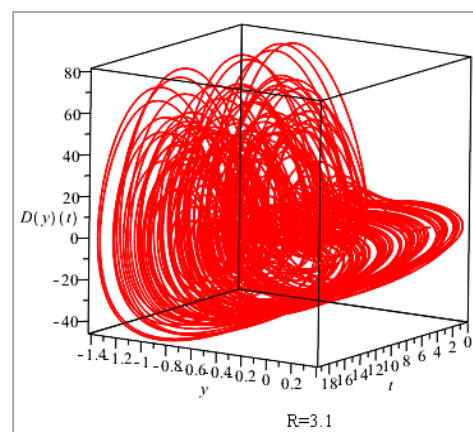


Рисунок 8.24 –  $R = 3,1$ : траєкторії у тривимірному просторі

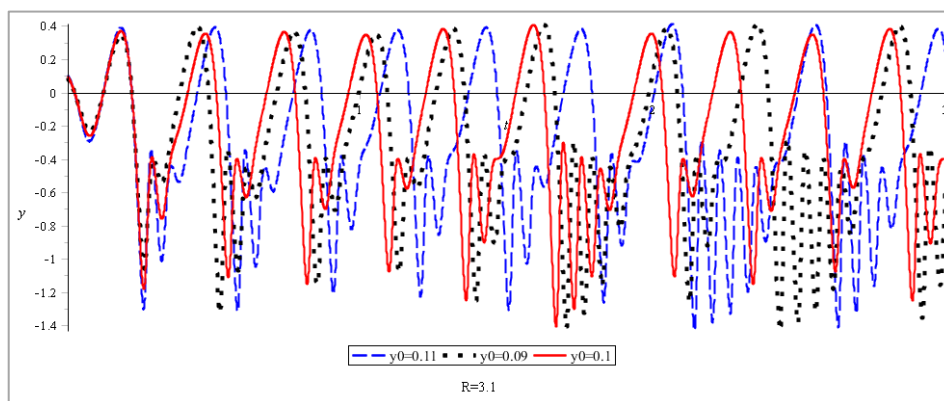


Рисунок 8.25 – Чисельний розв'язок задачі Коші (8.20), (8.21) при  $R = 3,1$ : незначна зміна початкових умов призводить до суттєвої зміни коливань

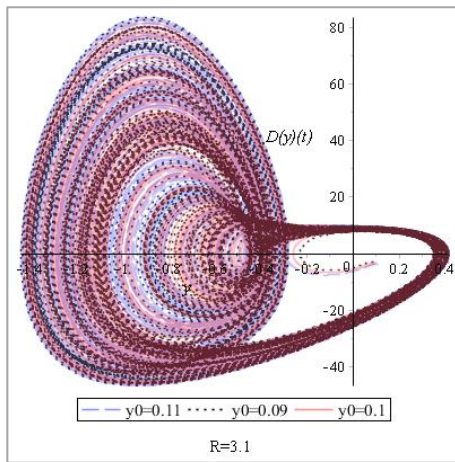


Рисунок 8.26 – Плоский фазовий портрет при  $R = 3,1$

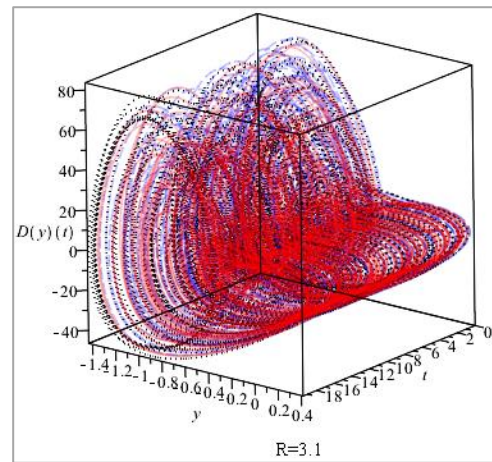


Рисунок 8.27 – 3D фазовий портрет при  $R = 3,1$

Для коректної характеристики динаміки та підтвердження хаотичної поведінки системи були розраховані для різних значень  $R$  експоненти Ляпунова та розмірності Ляпунова. Оскільки всі показники Ляпунова при  $R = 3,0$  від'ємні (рис. 8.28), система не хаотична. При  $R = 3,05$  найбільший показник Ляпунова стає додатним (рис. 8.29), що свідчить про появу хаосу в системі.

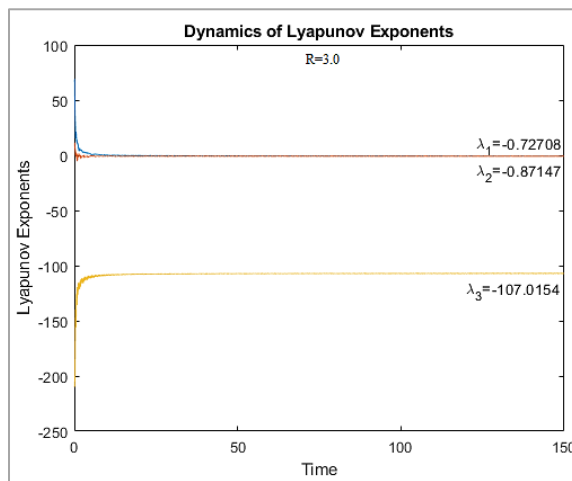


Рисунок 8.28 – Динаміка експонент Ляпунова при  $R = 3,0$ : не хаотична система

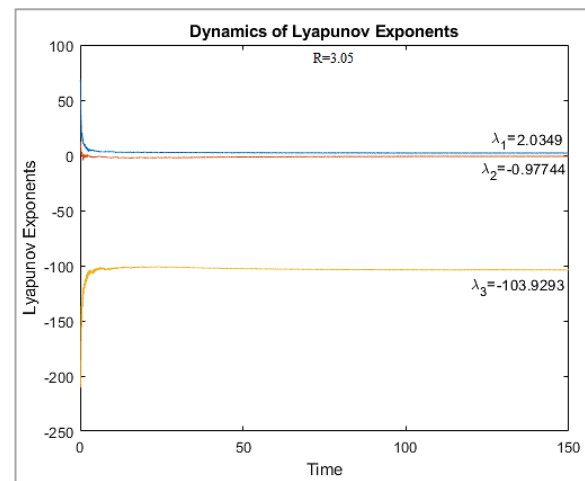


Рисунок 8.29 – Динаміка експонент Ляпунова при  $R = 3,05$ : хаотична система

Розраховані значення показників Ляпунова  $D_L$  підтверджують зроблені висновки про відсутність чи наявності хаосу у системі. Для  $R = 3,05$  і  $R = 3,1$  отримуємо значення розмірностей Ляпунова:  $D_L \Big|_{R=3,05} = 2,0102$ ;  $D_L \Big|_{R=3,1} = 2,0316$ , які відповідають хаотичній системі третього порядку.

## ВИСНОВКИ

За багатовікову історію свого існування механіка композитів розвивалася в різних напрямках і з різними пріоритетами.

За класифікацією J. R. Willis [83], численні методи механіки композитів можна розділити на чотири визначальні категорії: асимптотичні, самоузгоджені, варіаційні методи і методи моделювання.

За наведеною в книзі [84] класифікацією, в механіці композитів умовно можна виділити чотири основні напрямки досліджень – теорії композиційних матеріалів: математичну, фізичну, обчислювальну й асимптотичну. Між ними немає чіткої межі: вони не є конкуруючими й тим більш взаємовиключними підходами, кожен має свої сильні сторони та специфічні сфери застосування, а тому й розглядати їх слід у нерозривній єдності – взаємодоповнюючими, що дадуть можливість всебічно описати об'єкт дослідження з різних точок зору.

Математичні теорії композитних матеріалів [26, 85-96] дають можливість строгого математичного обґрунтування використовуваних методів, алгоритмів і розрахункових схем. Фізичні теорії [97-110] націлені, в першу чергу, на фізичну суть процесів, що відбуваються, дозволяють глибше зрозуміти її та оцінити адекватність відповідного математичного апарату, що застосовується для опису цих процесів. Обчислювальні теорії [32, 37, 54, 111-119] композитних матеріалів повсюдно використовуються як в інженерних розрахунках, так і при проведенні наукових досліджень фундаментального і прикладного характеру.

У сучасній світовій науці широкої популярності набули фундаментальні наукові досягнення в дослідженні композитних матеріалів представників української школи механіків [85, 88-97, 99-108, 111-116, 118-164]. Протягом 1993–2003 років в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенко Національної академії наук України, очолюваному на той час професором, академіком НАН України О. М. Гузем, вийшла у світ колективна монографія в 12 томах «Механіка композитів» [85], в якій узагальнені результати фундаментальних і прикладних досліджень співробітників інституту. У цій багатогранній праці, що не має аналогів у світовій науковій літературі, знайшли відображення результати

вивчення, розробки й розв'язку широкого спектру фундаментальних та прикладних науково-дослідних проблем механіки композитних матеріалів, розроблено методи прогнозування їх фізико-механічних властивостей у залежності від умов експлуатаційного режиму роботи та конструкційних особливостей використання.

Серед найбільш значимих праць у галузі механіки композитів, опублікованих уже в 21 столітті, книги українських учених [122, 165-175].

У жовтні 2023 року міжнародним науковим видавництвом «Springer» було опубліковано колективну монографію «Advances in Mechanics: Current Research Results of the NAS of Ukraine» («Досягнення механіки: результати сучасних досліджень НАН України») [176]. Книга присвячена 145-річчю від дня народження всесвітньо відомого українського вченого в галузі механіки С. П. Тимошенка і стала 191-м томом книжкової серії «Advanced Structured Materials».

У виданні висвітлені дослідження вітчизняних науковців за сучасними напрямками механіки твердого тіла, і зокрема в галузі механіки композитних матеріалів. За словами одного з редакторів і авторів монографії, віце-президента НАН України, академіка В. Л. Богданова, монографія є унікальним виданням; це перша опублікована у відомому іноземному видавництві книга, повністю присвячена стану досліджень у Національній академії наук України саме в науковій галузі механіки. Книга широко представляє роботи українських учених-механіків у світовому інформаційному просторі, що надзвичайно важливо у нинішній важкий як для нашої науки, так і для нашої країни час [177].

Трендом сучасного напрямку досліджень – у вік інформатизації та цифрових технологій – є використання засобів комп'ютерних технологій: математичних пакетів і чисельних методів аналізу. Однак, на наше переконання, якісний прорив у чисельних дослідженнях, пов'язаний із появою потужних ПК і новітнього програмного забезпечення, не тільки не применшує, а навпаки, надає значущості в науці асимптотичному підходу.

Коректно побудовані асимптотики дають можливість отримати структуровану, втілену в аналітичних співвідношеннях, інформацію про властивості досліджуваного об'єкта – чого важко очікувати від чисельних алгоритмів. Якщо аналітичні формули описують ту чи іншу характеристику

досліджуваного об'єкта або процесу – то асимптотичні дозволяють виділити їх найбільш загальні закономірності та істотні складові, які при незначному збуренні системи призводять до значущих варіацій в розв'язках, тобто, іншими словами, допомагають зрозуміти фізичну сутність явищ. На необхідність використання асимптотичної інформації при розробці обчислювальних або експериментальних схем вказував D. G. Crighton [178], підкреслюючи, що без такої інформації не представляється можливим ідентифікувати критичні параметри даних процесів.

Асимптотичні методи [23, 25, 26, 33, 34, 50, 58, 84, 120, 124, 132, 148, 150, 151, 179-182] ефективно працюють в області граничних значень структурних і фізичних параметрів композитів – саме там, де застосування обчислювальних схем є проблематичним. Більш того, як показує досвід, часто асимптотичні розв'язки чисельно працюють далеко за межами їх номінального діапазону застосовності [178]. Ще важливіше, що вони можуть трактуватися як перші наближення деяких асимптотичних процесів, що дозволяє в рамках єдиного підходу будувати наступні наближення, які уточнюють відповідні розв'язки [23, 50, 84, 180].

У цьому зв'язку безумовно представляється актуальним дослідження щодо побудови асимптотичних моделей і розробки адекватних методів їх математичного опису – тим більше у світлі сучасних тенденцій створення й повсюдного застосування в будівельній механіці нових композиційних матеріалів, «розумних» композитів із заданими властивостями та прогнозованою поведінкою в умовах експлуатації [109].

Дисертація є завершеною науковою працею, в якій досліджено важливу науково-прикладну проблему: побудовані й обґрунтовані на фізичному рівні асимптотичні моделі для аналізу макроскопічних властивостей композитних матеріалів різної структури, розроблено строгий математичний апарат їх опису, знайдені аналітичні розв'язки задач будівельної механіки в області граничних значень фізичних і геометричних параметрів композитів, надана асимптотична й чисельна оцінка їх точності, здійснено дослідження області застосовності, проведено якісний та кількісний аналіз достовірності одержаних результатів.

Узагальнені висновки за результатами проведеного дослідження можуть бути сформульовані таким чином:

1) Проведено узагальнення трифазної моделі композиту з урахуванням форми включення.

1.1) Для композитів з циліндричними включеннями круглого профілю на основі ТФМ знайдено в двочленному наближенні МЗФМ аналітичний розв'язок, який при доперколяційних значеннях розміру включення  $a$  дозволяє побудувати єдиний універсальний вираз ефективної провідності композитного матеріалу для всього діапазону розмірів включень аж до порога протікання.

1.2) Для композитного матеріалу, армованого циліндричними волокнами квадратного профілю, знайдені аналітичні й асимптотичні розв'язки, які добре погоджуються між собою та з відомими результатами інших авторів – чисельними розв'язками, експериментальними даними, аналітичними співвідношеннями й асимптотичним розкладеннями. Доведено обґрунтованість, достовірність й точність отриманих результатів та їх відповідність фізичній природі задачі в усьому діапазоні зміни геометричного розміру включень  $a$  та їх фізичної характеристики  $\lambda$ , включаючи граничні випадки  $a \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 1$  і  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$ .

2) Отримані асимптотичні наближення трифазної моделі композиту, що розширюють її область застосування.

2.1) Перебудова в АП розв'язків, знайдених на основі природної фізичної моделі – ТФМ, дозволяє не тільки принципово розширити кількісні межі застосування останньої, а й якісно описати фізичний процес, що відбувається в композиті при великих розмірах включень  $a \rightarrow 1$  гранично великої провідності  $\lambda \rightarrow \infty$ : перколяційний перехід та утворення нескінченного кластеру. Такий результат можна трактувати як ефективне поєднання обраної фізичної моделі композиту та адекватно використаного математичного апарату АП.

2.2) Розроблено модифікований алгоритм ТФМ, суть якого полягає в апроксимації належним чином характерного геометричного параметра комірки. Ефективний коефіцієнт визначається з трансцендентного рівняння, наявність в якому природного малого параметра дає можливість коректно виконати всі граничні переходи. Асимптотичний і детальний чисельний аналіз ТФММ підтвердив адекватність моделі при всіх значеннях фізико-геометричних характеристик



композита, включаючи асимптотичні співвідношення в граничних випадках.

3) Знайдено асимптотичні розв'язки для високопровідних щільно упакованих композитів на основі ТЗМ.

3.1) Для волокнистих композитів із включеннями квадратного профілю отримано асимптотичне співвідношення, що характеризує стан ефективного гомогенного середовища при близьких до гранично великих значеннях розмірів включень та їх провідності. Достовірність результатів підтверджується порівнянням в окремих випадках з відомими асимптотичними розкладеннями.

3.2) ТЗМ застосовано при розв'язанні локальної задачі для композитів із круглими циліндричними включеннями. Знайдені асимптотичні розв'язки коректно описують ефективний параметр при близьких до гранично великих значеннях геометричного і фізичного параметрів структури, що підтверджується збігом головного члена асимптотики з відомим асимптотичним виразом. Проведено узагальнення розв'язку на випадок великих розмірів включень малої провідності та для практично непровідних включень.

3.3) Розроблено модель ТЗМ для композитів із криволінійними ромбічними включеннями. Отримано різні асимптотики за геометричним і фізичним параметрами композиту: великі ( $0 \ll a < 1$ ) абсолютно провідні ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) включення; включення гранично великого розміру ( $a = 1$ ) великої, але скінченної провідності ( $1 \ll \lambda < \infty$ ); великі ( $0 \ll a < 1$ ) непровідні ( $\lambda = 0$ ) включення; включення гранично великих геометричних розмірів ( $a = 1$ ) низької провідності ( $0 < \lambda \ll 1$ ).

3.4) Для гексагональної решітки отримано головний член та першу поправку асимптотичного розкладення ефективного параметра для ідеально провідних включень при наближенні їх розміру до максимального. Показано, що головний член асимптотики співпадає з відомою асимптотичною формулою. Аналіз чисельного порівняння знайденого розв'язку з відомими в окремих випадках результатами інших авторів підтвердив високу точність апроксимації моделі.

3.5) Для композита гексагональної структури отримано вираз ефективного параметра у разі ідеально провідних включень середніх розмірів  $a \leq 1/\sqrt{3}$ .

Перебудова належним чином цього розв'язку в АП дозволила отримати коректні результати для будь-яких розмірів включень  $0 \leq a < 1$  і асимптотику при  $a \rightarrow 1$ , головний член якої співпадає з відомим результатом. Знайдені співвідношення верхньої та нижньої оцінки асимптотики приведенного параметра, «вилка» між якими вужча за межі Хашина – Штрікмана і не перевищує 3% при будь-яких значеннях розміру включень.

3.6) Досліджені власні коливання прямокутної композитної мембрани з гексагональним масивом круглих включень. В аналітичному вигляді знайдені перші поправки власних форм і власних частот коливань. Визначені умови, за яких буде отримана ненульова перша поправку власної частоти.

3.7) За перетворенням Лапласа та методом асимптотичної гомогенізації досліджено нестационарну теплопровідність у волокнистих композитах гексагональної структури. При розв'язку локальної задачі із застосуванням ТЗМ гексагональна форма елементарної комірки апроксимується введенням функції змінної координати. Розглянуто задачу для скінченної області. Досліджено випадок охолодження прямокутної композитної структури за законом охолодження Ньютона.

4) З використанням апарату асимптотично еквівалентних функцій проведено дослідження граничних станів композитних структур.

4.1) Для композитної структури з періодично розташованими циліндричними включеннями квадратного профілю шляхом зрощування асимптотичних співвідношень за розміром включень та за їх провідністю побудовано єдиний аналітичний вираз приведенного параметра теплопровідності, правомірний у всьому діапазоні зміни геометричної та фізичної характеристик композиту, включаючи їх граничні значення. Визначені області, в яких основний внесок у вираз приведенного коефіцієнта вносять відповідні асимптотичні співвідношення.

4.2) На основі методу несиметричного пилкоподібного перетворення аргументу розроблено й обґрунтовано математичний апарат для опису локальних та дискретно змінюваних властивостей композиту. Побудовано модель композиту з круглими включеннями, що торкаються по тонкому інтерфейсу на межі розділу фаз, та отримано асимптотичний вираз ефективного

параметра у випадку ідеальної провідності включень. Показано, що застосування математичного апарату  $\tau$ -перетворення й асимптотично еквівалентних функцій дозволяє: з математичної точки зору – врахувати локальні ефекти на межі розділу фаз композиту, які неможливо описати безпосередньо в рамках теорії осереднення; з фізичної точки зору – значно розширити клас структур композитів, які можуть бути досліджені в рамках єдиного запропонованого підходу.

4.3) На основі техніки  $\tau$ -перетворення і методу асимптотично еквівалентних функцій побудовано фізичну модель та знайдено математичні співвідношення, що описують контакт непровідних круглих включень з інтерфейсом на межі розділу фаз композиту. Отримано асимптотичне співвідношення для ефективного коефіцієнта композиту, яке є інверсією виразу для абсолютно провідних включень. Знайдені розв'язки алгебраїчно точно задовольняють теорему Келлера, тим самим підтверджуючи фізичну адекватність моделей.

4.4) Шляхом перевизначення перетвореного виразу ТЗМ у термінах  $\tau$ -функції, з використанням теореми Келлера і методу асимптотично еквівалентних функцій знайдено асимптотичні співвідношення для композитів з ідеально провідними криволінійними ромбічними включеннями за наявності інтерфейсу на межі розділу фаз. Розроблений підхід узагальнено на випадок непровідних криволінійних ромбічних включень з інтерфейсом.

4.5) Для гексагонального масиву круглих включень, що торкаються по тонкому міжфазному інтерфейсу, побудовано модель композиту, яка математично описується аналітичними співвідношеннями методів пилкоподібного перетворення аргументу й асимптотично еквівалентних функцій. Знайдено асимптотичний вираз ефективного параметра композиту для абсолютно провідних включень з інтерфейсом, головний член якого співпадає з відомою асимптотичною формулою.

4.6) Отримано асимптотичний розв'язок і здійснено асимптотичну оцінку ефективної провідності гексагонального масиву низько- та непровідних круглих включень великих розмірів за наявності інтерфейсу на межі розділу фаз. Показано, що знайдені асимптотичні співвідношення для абсолютно провідних і непровідних включень задовольняють теорему Келлера.

5) Проведено аналіз умов контакту «матриця – включення» в композитних структурах.

5.1) Розглянуто фізичний зміст і надано математичний опис різних структурних моделей двофазних волокнистих композитів за умовами контакту «матриця – включення».

5.2) Визначені асимптотичні наближення в моделях двофазних волокнистих композитів: понять «матриця» і «включення»; ідеалізації провідності включень як то «абсолютно провідні» і «непровідні». Проаналізовано поняття фізичної еквівалентності композитних структур та наведено співвідношення зв'язку для їх ефективних параметрів.

5.3) Класифіковано асимптотичні вирази ефективних параметрів композитів різної структури за умовами контакту на межі розділу фаз: по матеріалу матриці; по матеріалу включень; при наявності інтерфейсу – тонкого прошарку із середнім значенням провідностей матриці та включень. Показано, що для представлених моделей композитів виконується співвідношення Діхне для «додаткових систем».

б) Побудовані вищі наближення формули Максвелла.

6.1) Розроблено двофазну модель волокнистого композиту з малими включеннями квадратного профілю. Математичний опис моделі здійснюється за допомогою теорії осереднення з подальшим застосуванням асимптотичних спрощень МЗФМ і альтернуючого МШ.

6.2) На основі ДФМ знайдено розв'язок задачі МШ для композиту з квадратними циліндричними включеннями малого розміру. На підставі чисельних оцінок визначено область застосування розв'язку за МШ і запропоновано критерій того, яке включення практично можна вважати «малим».

6.3) Побудовані ітерації вищих порядків МШ розв'язку задачі в рамках ДФМ для квадратних включень. Аналітично доведено, що головний член асимптотичного розкладення ефективного параметра для малих розмірів включень представляє собою ФМ. Ефективність ДФМ обумовлена тим, що на відміну від ФМ, яка отримана без урахування форми включень і визначає ефективну провідність лише за їх концентрацією, в ДФМ ураховано форму саме

включень квадратного профілю, що складають просту квадратну решітку.

6.4) Побудовані вищі наближення ФМ для волокнистих композитів із круглими включеннями. За узагальненою  $N$ -ітераційною процедурою МШ отримано вираз приведенного коефіцієнта теплопровідності, який асимптотично, з точністю до членів порядку  $a^{14}$  включно, задовольняє теорему Келлера.

6.5) Здійснено асимптотичний аналіз розв'язку за  $N$ -ітераційною процедурою МШ і оцінку меж його застосування. Доведено, що головна частина асимптотичного розкладення ефективного параметра при малих розмірах включень  $a \ll 1$  співпадає з ФМ; перша ненульова поправка ФМ має порядок  $a^{10}$ , що якісно збігається з відомим результатом для непровідних порожнин. Показано, що  $N$ -ітераційну поправку слід ураховувати для композитів з великими включеннями ( $a \gg 0$ ) великої ( $\lambda \gg 1$ ) або малої ( $\lambda \ll 1$ ) провідності: вона вносить істотний вклад в ефективну провідність структури у порівнянні з ФМ.

6.6) Уточнено ФМ на основі техніки АП. При перебудові  $N$ -ітераційного розв'язку за МШ визначаються «пряма» і «зворотна» складові – АП за розміром включень  $a$ , які потім зрощуються в триточкову АП за їх провідністю  $\lambda$ . Порівняння результатів розрахунків з даними інших авторів показало, що аналітичний вираз осередненого коефіцієнта по методу ШВ-П має значно ширшу область застосування: працює з достатньою для практичних цілей точністю для включень будь-якої провідності ( $0 \leq \lambda < \infty, \lambda \rightarrow \infty$ ) при їх розмірах  $0 \leq a \leq 0,996$ .

6.7) Здійснено асимптотичне осереднення вищого порядку для динамічних задач: системи з неперервними параметрами; з періодично сконцентрованими дискретними елементами; для 1D кусково-неперервної системи. Точність одержаних наближень оцінена числовим моделюванням. Проведено порівняння чисельного й асимптотичного розв'язків для випадку високої контрастності; точного, гомогенізованого і високочастотного асимптотичного розв'язків у разі низької контрастності та хвиль різної довжини.

7) Обґрунтовано застосування техніки негладкого пилкоподібного перетворення аргументу до розв'язку задач механіки періодичної структури.

7.1) Визначено поняття несиметричного пилкоподібного перетворення

аргументу. Сформульовано основні властивості  $\tau$ -функції та її похідної. Знайдено співвідношення для перетворення неперервної  $4\pi$ -періодичної функції на функцію пилкоподібного аргументу.

7.2) В термінах  $\tau$ -перетворення представлені математичні співвідношення періодичної задачі теорії пружності для двофазного шаруватого композита. Надано вирази крайових задач на періоді композитної структури, компонентів напружено-деформованого стану, умов самоурівноваженості масових сил та виключення з періодичного розв'язку середньої складової. Знайдені асимптотичні співвідношення в граничних випадках жорсткісних та геометричних характеристик фаз композиту.

7.3) Досліджено нелінійний осцилятор при параметричному імпульсному збудженні. Для знаходження періодичних розв'язків осцилятора Дюффінга використано техніку негладкого пилкоподібного перетворення аргументу в загальному випадку:  $\tau = \tau(t, \theta)$ , де параметр  $\theta$  характеризує нахил «пили». Показано, що запропонований підхід приводить до розв'язку в області  $-1 \leq \tau \leq 1$  крайової задачі, яка не містить сингулярних функцій.

7.4) Побудовано асимптотичний розв'язок задачі для компонентів  $\tau$ -перетворення за часом у вигляді рядів за степенями малого параметра  $\varepsilon$ . У випадку симетричного  $\tau$ -перетворення знайдено точний розв'язок задачі в термінах спеціальних функцій Якобі. Проведено порівняння точного та асимптотичного розв'язків, яке підтвердило їх хорошу відповідність.

8) Досліджені моделі континуальної апроксимації дискретних систем.

8.1) Проведено чисельний аналіз моделей континуальної апроксимації 1D лінійних хвильових процесів. Розглянуто класичну континуальну модель, проміжну континуальну модель, квазіконтинуальну модель, уточнену квазіконтинуальну модель. Проведений для цих моделей порівняльний аналіз швидкості поширення хвиль показав, що найбільш точно апроксимує дискретне середовище уточнене квазіконтинуальне наближення, перевага якого проявляється, коли треба описати вищі форми коливань дискретного скінченного ланцюжка.

8.2) Проаналізовано перехід від дискретного до неперервного середовища:

вплив зміни симетрії на асимптотичну поведінку хвиль. Для дискретної моделі – решітки Лагранжа досліджено різні неперервні наближення й показано хорошу відповідність хвильового руху дискретної решітки та її континуальної апроксимації за моделлю, побудованою на основі АП. Порівняння фазової та групової швидкостей показало практичний збіг результатів для дискретної і неперервної моделей.

8.3) Розглянуто задачу апроксимації функції Гріна ланцюжка Лагранжа неперервними аналогами. Показано, що використання неперервних рівнянь на основі двоточкових АП дозволяє отримати аналітичні вирази функцій Гріна й коректно описати особливості розв'язку дискретних задач неперервними функціями.

8.4) Досліджено проблему особливостей, що виникають у класичній теорії пружності при дії зосереджених навантажень. Показано, що існує альтернативна можливість регуляризації розв'язку: заміна  $\delta$ -функції Дірака інтерполяційною функцією Уїттакера – Шеннона – Котельникова. При цьому достатньо використовувати лише один додатковий параметр, що характеризує мікрогетерогенність середовища. Розглянуто аналог задачі Фламана. Знайдений розв'язок не має особливостей і наближається до класичного при наближенні параметра мікронеоднорідності до нуля.

8.5) Побудовано континуальну модель дискретного рівняння Ферхюльста. Показано, що диференціальне рівняння при стандартній континуалізації, заснованій на рядах Маклорена, визначає детерміновані траєкторії і не має хаотичного розв'язку. Розроблено процедуру континуалізації, засновану на перетворенні диференціального оператора шляхом перебудови в діагональну АП.

8.6) Доведено наявність хаосу в неперервній моделі. Для коректної характеристики динаміки та підтвердження хаотичної поведінки системи проведено чисельний аналіз, який включав: чисельний розв'язок задачі Коші для континуалізованого перебудовою в АП звичайного диференціального рівняння та належним чином складених початкових умов; аналіз характеру коливань при незначній зміні початкових умов; побудову фазової траєкторії, перетину Пуанкаре і траєкторій у 3D просторі; розрахунок експонент Ляпунова та розмірностей Ляпунова. Визначені значення параметра  $R$  неперервної моделі, за яких має місце відповідна динаміка: періодичні коливання; періодичні коливання із субгармоніками; хаотичні коливання.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part I: Application of the boundary shape perturbation method. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 154–177.
2. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Three-phase model for a fiber-reinforced composite material. *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 95–104.
3. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Danishevs'kyi V. V., Tokarzewski S. Homogenization procedure and Padé approximants for effective heat conductivity of composite materials with cylindrical inclusions having square cross-section. *The Royal Society Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1999. Vol. 455. Is. 1989. P. 3401–3413.
4. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part II: Application of Padé approximants. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 178–191.
5. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Application of an improved three-phase model to calculate effective characteristics for a composite with cylindrical inclusions. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. No. 1. P. 197–222.
6. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Kvitka S. A. Effective heat conductivity of a composite with hexagonal lattice of perfectly conducting circular inclusions: An analytical solution. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 102. Is. 11. P. e202200216.
7. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Markert B., Starushenko G. A. Analytical homogenization for dynamic analysis of composite membranes with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017. Vol. 17. Is. 5. P. 1740015-1–1740015-14.



8. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Non-stationary heat transfer in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. Is. 4. P. 1339–1350.
9. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models and transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part I: Square lattice of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 179. P. 617–627.
10. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models for transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part II: Square lattices of rhombic inclusions and hexagonal lattices of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 180. P. 351–359.
11. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Analytical expressions for effective thermal conductivity of composite materials with inclusions of square cross-section. *Composites: Part B*. 2013. Vol. 50. P. 44–53.
12. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic analysis of the Maxwell Garnett formula using the two-phase composite model. *International Journal of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 7. No. 02. P. 1550025-1–1550025-27.
13. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part I: using the Schwarz alternating method. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 4971–4990.
14. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part II: using Padé approximants. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 5145–5157.
15. Andrianov I. I., Andrianov I. V., Starushenko G. A., Borodin E. I. Higher order asymptotic homogenization for dynamical problems. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 27. Is. 9. P. 1672–1687.
16. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Employment of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method in the elasticity theory for

layered composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. Vol. 45. Is. 14. P. 3055–3060.

17. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. Study of a non-linear oscillator under parametric impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 222. Is. 2. P. 307–328.

18. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Weicher D. Numerical investigation of 1D continuum dynamical models of discrete chain. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 92. Is. 11–12. P. 945–954.

19. Andrianov I., Koblik S., Starushenko G. Transition from discrete to continuous media: the impact of symmetry changes on asymptotic behavior of waves. *Symmetry*. 2021. Vol. 13. Is. 6. P. 1008.

20. Andrianov I. V., Koblik S. G., Starushenko G. A., Kudaibergenov A. K. On aspects of gradient elasticity: Green's functions and concentrated forces. *Symmetry*. 2022. Vol. 14. Is. 2. P. 188.

21. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S., Khajiyeva L. The Verhulst-like equations: integrable OΔE and ODE with chaotic behavior. *Symmetry*. 2019. Vol. 11. Is. 12. P. 1446.

22. Hashin Z. Analysis of composite materials – a survey. *Journal of Applied Mechanics*. 1983. Vol. 50. Is. 3. P. 481–505.

23. Старушенко Г. А. Асимптотические методы и модели в теории композитных материалов : монография. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2021. 696 с.

24. Nayfeh A. H. Perturbation methods. New York : John Wiley & Sons, 2000. 425 p.

25. Lions J.-L. On same homogenisation problem. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 62. Is. 5. P. 251–262.

26. Bakhvalov N., Panasenko G. Homogenisation: averaging processes in periodic media. Mathematical problems in mechanics of composite materials. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1989. 402 p.

27. Christensen R. M. Mechanics of composite materials. New York : Dover

Publications, 2005. 384 p.

28. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Метод возмущения формы границ в механике сплошных сред. Киев : Вища школа, 1989. 352 с.

29. Немиш Ю. Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. Киев : Наукова думка, 1989. 312 с.

30. Maxwell J. C. Treatise on electricity and magnetism. Oxford : Clarendon Press, 1873. 489 p.

31. Mityushev V. Steady heat conduction of a material with an array of cylindrical holes in nonlinear case. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1998. Vol. 61. Is. 1. P. 91–102.

32. Perrins W. T., McKenzie D. R., McPhedran R. C. Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1979. Vol. 369. P. 207–225.

33. McPhedran R. C., Poladian L., Milton G. W. Asymptotic studies of closely spaced, highly conducting cylinders. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1988. Vol. 415. Is. 1848. P. 185–196.

34. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Danishevs'kyi V. V. Asymptotic homogenization of composite materials and structures. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62. Is. 3. P. 030802-1–030802-20.

35. Andrianov I. V., Danishevs'kyi V. V., Kalamkarov A. L. Analysis of the effective conductivity of composite materials in the entire range of volume fractions of inclusions up to the percolation threshold. *Composites Part B: Engineering*. 2010. Vol. 41. Is. 6. P. 503–507.

36. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic methods in the theory of perforated membranes of nonhomogeneous structure. *Engineering Transactions*. 1995. Vol. 43. No. 1–2. P. 5–18.

37. Bourgat J. F. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients. *Lectures Notes in Mathematics*. 1979. Vol. 704. P. 330–356.

38. Cole K. S., Li C. L., Bak A. F. Electrical analogues for tissues.

*Experimental Neurology*. 1969. Vol. 24. Is. 3. P. 459–473.

39. Keller J. B. A theorem on the conductivity of a composite medium. *Journal of Mathematical Physics*. 1964. Vol. 5. Is. 4. P. 548–549.

40. Baker G. A., Jr., Graves-Morris P. Padé approximants. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. 764 p.

41. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials. *Journal of Applied Physics*. 1962. Vol. 33. Is. 10. P. 3125–3131.

42. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1963. Vol. 11. Is. 2. P. 127–140.

43. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Tokarzewski S. Homogenization procedure and Padé approximations in the theory of composite materials with parallelepiped inclusions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1998. Vol. 41. Is. 1. P. 175–181.

44. Berlyand L., Novikov A. Error of the network approximation for densely packed composites with irregular geometry. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2002. Vol. 34. Is. 2. P. 385–408.

45. Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W., Starushenko G. Effective conductivity and critical properties of a hexagonal array of superconducting cylinders // Contributions in Mathematics and Engineering. In Honor of Constantin Carathéodory / eds. P. M. Pardalos, T. M. Rassias. Switzerland : Springer International Publishing, 2016. P. 255–297.

46. Andrianov I. V., Danishevs'kyi V. V., Weichert D. Simple estimations on effective transport properties of a random composite material with cylindrical fibres. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2008. Vol. 59. Is. 5. P. 889–903.

47. Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables / eds. M. Abramowitz, I. A. Stegun. New York : Dover Publications, 1965. 1046 p.

48. Пилипчук В. Н., Старушенко Г. А. О представлении периодических

решений дифференциальных уравнений посредством косоугольно-пилообразного преобразования аргумента. *Доповіди Національної академії наук України*. 1997. № 11. С. 25–28.

49. Pilipchuk V. N., Starushenko G. A. A version of non-smooth transformations for one-dimensional elastic systems with a periodic structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1997. Vol. 61. Is. 2. P. 265–274.

50. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Danishevs'kyi V. V., Ivankov A. O. Asymptotic methods in the theory of plates with mixed boundary conditions. Chichester : Wiley, 2014. 288 p.

51. O'Brien R. W. Properties of suspensions of interacting particles : Doctoral thesis. Cambridge : University of Cambridge, 1977. 244 p.

52. Dykhne A. M. Conductivity of a two-dimensional system. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1971. Vol. 32. No. 1. P. 63–65.

53. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. Groningen : P. Noordhoff Ltd, 1958. 681 p.

54. Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W. Computational analysis of structured media. Amsterdam : Elsevier, 2017. 328 p.

55. Santosa F., Vogelius M. First-order corrections to the homogenized eigenvalues of periodic composite medium. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1993. Vol. 53. No. 6. P. 1636–1668.

56. Moskow S., Vogelius M. First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. The case of Neumann boundary conditions. Rutgers University : Preprint, 1996. 34 p.

57. Chen W., Fish J. A dispersive model for wave propagation in periodic heterogeneous media based on homogenization with multiple spatial and temporal scales. *Journal of Applied Mechanics*. 2001. Vol. 68. Is. 2. P. 153–161.

58. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Danishevs'kyi V. V. Linear and nonlinear waves in microstructured solids: homogenization and asymptotic approaches. Boca Raton : CRC Press, Taylor & Francis, 2021. 250 p.

59. Colquitt D. J., Danishevskyy V. V., Kaplunov J. Composite dynamic

models for periodically heterogeneous media. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 24. Is. 9. P. 2663–2693.

60. Pilipchuk V. N. On some form of periodic solutions representation (non-smooth transformation of arguments, the corresponding algebraic structure, and applications) // *Short Communications of the International Congress of Mathematicians* (Zurich, Aug 3-11, 1994). Zurich, 1994. P. 202.

61. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев : Наукова думка, 1972. 506 с.

62. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Галка А. Метод пилообразного преобразования аргумента в периодических задачах теории слоистых композитов // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 6th Ukrainian – Polish seminar* (Warsaw, Jul 6-11, 1998). Warsaw, 1998. No. 6. P. 551–556.

63. Slepian L. I. Models and phenomena in fracture mechanics. Berlin : Springer, 2002. 576 p.

64. Kunin I. A. Elastic media with microstructure. 1. One-dimensional models. Berlin / Heidelberg : Springer, 1982. 292 p.

65. Filimonov A. M. Continuous approximations of difference operators. *Journal of Differential Equations & Applications*. 1996. Vol. 2. Is. 4. P. 411–422.

66. Collins M. A. A quasicontinuum approximation for solitons in an atomic chain. *Chemical Physics Letters*. 1981. Vol. 77. Is. 2. P. 342–347.

67. Rosenau P. Hamiltonian dynamics of dense chains and lattices: Or how to correct the continuum. *Physics Letters A*. 2003. Vol. 311. Is. 1. P. 39–52.

68. Andrianov I. V., Awrejcewicz J. Continuous models for 1D discrete media valid for higher-frequency domain. *Physics Letters A*. 2005. Vol. 345. Is. 1–3. P. 55–62.

69. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Weichert D. Improved continuous models for discrete media. *Mathematical Problems in Engineering*. 2009. Vol. 2010. Special Issue. Article ID 986242.

70. Gao Q., Wu F., Zhang H., Zhong W., Howson W., Williams F. Exact

solutions for dynamic response of a periodic spring and mass structure. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Is. 5. P. 1183–1190.

71. Brillouin L. Wave propagation in periodic structures: Electric filters and crystal lattices. 2nd ed. New York : Dover Publications, 2003. 255 p.

72. Charlotte M., Truskinovsky L. Towards multi-scale continuum elasticity theory. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2008. Vol. 20. Is. 3. P. 133–161.

73. Charlotte M., Truskinovsky L. Lattice dynamics from a continuum viewpoint. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2012. Vol. 60. Is. 8. P. 1508–1544.

74. Andrianov I. V., Danishevskyy V. V., Kaplunov J. D., Markert B. Wide frequency higher-order dynamic model for transient waves in a lattice // Problems of nonlinear mechanics and physics of materials / eds. I. V. Andrianov, A. I. Manevich, Y. V. Mikhlin, O. V. Gendelman. Cham : Springer Nature, 2018. P. 3–12.

75. Wattis J. A. D. Approximations to solitary waves on lattices. II. Quasi-continuum methods for fast and slow waves. *Journal of Physics A*. 1993. Vol. 26. No. 5. P. 1193–1209.

76. Whittaker E. T. On the functions which are represented by the expansion of the interpolation theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A: Mathematics*. 1915. Vol. 35. P. 181–194.

77. Kotel'nikov V. A. On the carrying capacity of the “ether” and wire in telecommunications // Modern sampling theory: Mathematics and applications / eds. J. J. Benedett, P. J. S. J. Ferreira. Boston : Birkhäuser, 2000. P. 27–45.

78. Shannon C. E. Communication in the presence of noise. *Proceedings of the IRE*. 1949. Vol. 37. Is. 1. P. 10–21.

79. Vasiliev V. V., Lurie S. A., Salov V. A. On the Flamant problem for a half-plane loaded with a concentrated force. *Acta Mechanica*. 2021. Vol. 232. Is. 5. P. 1761–1771.

80. Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fundamental equations plane theory of elasticity, torsion and bending. Dordrecht : Springer, 1977. 763 p.

81. Verhulst P. F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles*. 1845. Vol. 18. P. 14–54.
82. Verhulst P. F. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*. 1847. Vol. 20. P. 1–32.
83. Willis J. R. The overall elastic response of composite materials. *Journal of Applied Mechanics*. 1983. Vol. 50. Is. 4b. P. 1202–1209.
84. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Danishevs'kyu V. V. Asymptotical mechanics of composites. Modelling composites without FEM. Cham : Springer, 2018. 329 p.
85. Механика композитов : в 12 т. / ред. А. Н. Гузь. Киев : Наукова думка (Т. 1–4), Киев : А.С.К. (Т. 5–12), 1993–2003.
86. Milton G. W. The theory of composites. Cambridge : University Press, 2002. 719 p.
87. Torquato S. Random heterogeneous materials. Microstructure and macroscopic properties. New York : Springer, 2002. 701 p.
88. Гребенюк С. М., Смолянкова Т. М., Клименко М. І. Модель гомогенізації різномодульного транстропного волокнистого композиту. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2020. № 2. С. 5–10.
89. Гузь А. Н., Рушицкий Я. Я. О построении основ механики нанокompозитов (обзор). *Прикладная механика*. 2011. Т. 47. № 1. С. 4–61.
90. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Богуславська А. М. Термопружна задача для порожнистого циліндра з композиційного матеріалу з транстропним волокном. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 82–89.
91. Матисяк Л. Поліноміальні композити та деякі типи розширень полів. *Карпатські математичні публікації*. 2023. Т. 15. № 1. С. 150–157.
92. Фильштинський Л. А., Загряжська П. І. Моделювання композитного



матеріалу з в'язкопружними компонентами. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2010. № 2. С. 141–144.

93. Хорошун Л. П., Левчук О. И. Эффективные упругие свойства стохастических однонаправленных волокнистых композитов при несовершенной адгезии. *Доповіді Національної академії наук України*. 2018. № 9. С. 51–63.

94. Шнеренко К. И., Годзула В. Ф. Дослідження напруженого стану циліндричної оболонки із композитного матеріалу з отвором під дією комбінованого навантаження // Системні технології : регіональний міжвузівський зб. наук. пр. Дніпропетровськ : НМетАУ, 2009. Вип. 3. № 62. С. 69–74.

95. Bulat A. F., Dyrda V. I., Grebenyuk S. M., Klymenko M. I. Determination of effective characteristics of a fibrous composite with account of viscoelastic deformation of its components. *Strength of Materials*. 2020. Vol. 52. Is. 5. P. 691–699.

96. Grebenyuk S., Smoliankova T., Klymenko M., Kudin O. The homogenization of multimodular composites at their longitudinal deformation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Applied Mechanics*. 2020. Vol. 3. No. 7 (105). P. 13–19.

97. Гетерогенные полимерные материалы : сборник статей Института химии высокомолекулярных соединений АН УССР / ред. Ю. С. Липатов. Киев : Наукова думка, 1973. 163 с.

98. Transport processes in macroscopically disordered media / Snarskii A. A. et al. New York : Springer, 2016. 294 p.

99. Богуславська А. М. Термомеханічні характеристики волокнистого композиційного матеріалу з анізотропними компонентами : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04. Запоріжжя, 2018. 133 с.

100. Голуб В. М., Чередніков О. М. Композиційні матеріали в модернізації літальних апаратів // Зб. наук. пр. науково-дослідного інституту випробувань і сертифікації озброєння та військової техніки. Чернігів : ДНВІ ВС ОВТ, 2019. Т. 1. № 1. С. 58–60.

101. Клименко М. І., Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Кудін О. В. Визначення ефективних релаксаційних характеристик в'язкопружного трансверсально-ізотропного волокнистого композиту при поздовжньому зсуві. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. Вип. 2. № 69. Т. 2. С. 75–80.

102. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Богуславська А. М. Термомеханічне деформування порожнистого композитного циліндра за різних типів армування композиту // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій* : зб. наук. пр. Дніпро : ДНУ ім. Олесь Гончара, 2019. Вип. 30. С. 105–115.

103. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Богуславська А. М. Термопружні характеристики волокнистого композиційного матеріалу з трансверсально-ізотропними матрицею і волокном // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій* : зб. наук. пр. Дніпро : ДНУ ім. Олесь Гончара, 2017. Вип. 27. С. 75–90.

104. Куриптя Я. А., Слепцов О. О., Шостак Т. С., Савченко Б. М. Електропровідні гібридні композити на основі поліолефінів. *Вісник Київського національного університету технологій та дизайну*. 2014. Вип. 6. № 80. С. 89–97.

105. Сайтарлы С. В., Дзюбенко Л. С., Плаван В. П., Пушкарёв Ю. Н., Сасьяненко А. А., Горбик П. П. Влияние наполнителя на структуру, термостойкость и механические свойства композиций на основе модифицированного полипропилена. *Mechanics of composite materials*. 2022. Vol. 58. No. 2. С. 321–334.

106. Снарский А. А. Знал ли Максвелл о пороге протекания? (К пятидесятилетию создания теории протекания). *Успехи физических наук*. 2007. Т. 177. Вып. 12. С. 1341–1344.

107. Столярова А. В., Гребенюк С. М., Клименко М. І. Поздовжній модуль пружності волокнистого композита з перехідним шаром. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 130–142.

108. Snarskii A., Yuskevich P. Effective medium theory for the thermoelectric

properties of composite materials with various percolation thresholds. 2006. arXiv:2006.11926 [cond-mat.mtrl-sci]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2006.11926>.

109. Kalita V. M., Snarskii A. A., Zorinets D., Shamonin M. Theoretical method for calculation of effective properties of composite materials with reconfigurable microstructure: Electric and magnetic phenomena. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2019. Vol. 535. P. 122467–122468.

110. Snarskii A. A., Shamonin M., Yuskevich P. Effective medium theory for the elastic properties of composite materials with various percolation thresholds. *Materials*. 2020. Vol. 13. Is. 5. P. 1243.

111. Гоменюк С. І., Гребенюк С. М., Клименко М. І., Мізерна О. Л. Чисельне моделювання в'язкопружного деформування віброізолятора із волокнистого композиційного матеріалу. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. Вип. 3. № 66. Т. 1. С. 39–44.

112. Гребенюк С. М. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів : дис. ... д-ра техн. наук : 01.02.04. Запоріжжя, 2016. 319 с.

113. Дария Заде С. Численная методика определения эффективных характеристик однонаправлено армированных композитов // *Вісник НТУ «ХП»* : зб. наук. пр. Харків : НТУ ХП, 2013. № 2 (1031). С. 59–66.

114. Дария Заде С., Львов Г. И. Численная методика определения эффективных характеристик однонаправлено армированных композитов гексагональной структуры. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2014. № 2. С. 59–66.

115. Коханенко Н. В. Плоская задача о краевых эффектах в композите периодической структуры, армированном прямоугольными волокнами. *Доповіді Національної академії наук України*. 2008. № 1. С. 56–58.

116. Коханенко Ю. В. Численное исследование задач трехмерной теории устойчивости композитов слоистой и ленточной структуры. *Прикладная механика*. 2001. Т. 37. № 3. С. 35–64.

117. Applied analysis of composite media. Analytical and computational results

for materials scientists and engineers / Drygaś P., Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W. Amsterdam : Elsevier; 2020. 372 p.

118. Akhundov V. M. The implicit finite difference method in the deformation mechanics of homogeneous and piecewise homogeneous bodies. *Mechanics of Composite Materials*. 2022. Vol. 57. Is. 6. P. 795–812.

119. Grebenyuk S. M., Klymenko M. I. Finite element modeling of the stress-strain state of a composite material with a viscoelastic matrix. *Mathematical and computer modelling of engineering systems* : collective monograph. Riga : Baltija Publishing. 2020. P. 19–34.

120. Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотический метод осреднения высшего порядка и динамические свойства композитных материалов. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2010. № 6 (147). С. 31–43.

121. Бабич И. Ю., Гузь А. Н., Чехов В. Н. Трехмерная теория устойчивости волокнистых и слоистых материалов. *Прикладная механика*. 2001. Т. 37. № 9. С. 3–43.

122. Білий Д. В., Комаров О. В., Лобода В. В. Антиплоска задача для одномірного п'єзоелектричного квазікристала з міжфазною тріщиною. *Computer Science and Applied Mathematics*. 2021. № 1. С. 5–14.

123. Білий Д. В., Лобода В. В., Комаров О. В. Аналітичний підхід до аналізу тріщини в 1D п'єзоелектричному квазікристалі // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : зб. наук. пр. Дніпро : ДНУ ім. Олесь Гончара, 2020. Вип. 31. С. 5–18.

124. Большаков В. И., Андрианов И. В., Данишевский В. В. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск : Пороги, 2008. 196 с.

125. Булат А. Ф., Дырда В. И., Гребенюк С. Н., Клименко М. И. Определение эффективных характеристик волокнистого вязкоупругого композита с трансверсально-изотропными составляющими. *Проблеми міцності*. 2019. № 2. С. 15–25.

126. Головчан В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. Киев : Наукова думка, 1987. 304 с.

127. Головчан В. Т. Об эффективных коэффициентах теплопроводности зернистой среды. *Инженерно-физический журнал*. 1981. Т. 40. № 2. С. 336–344.

128. Головчан В. Т. Распространение гармонических волн в волокнистых и пористых упругих материалах с регулярной микроструктурой. *Прикладная механика*. 2002. Т. 38. № 10. С. 27–51.

129. Гузь А. Н., Декрет В. А. Модель волокон конечных размеров в трёхмерной теории устойчивости композитных материалов (обзор). *Прикладная механика*. 2016. Т. 52. № 1. С. 3–77.

130. Данишевский В. В., Кушнеров Е. А. Распространение упругих плоских волн в волокнисто-армированном композитном материале // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій : зб. наук. пр. Дніпро : ДНУ ім. Олесь Гончара, 2016. Вип. 22. С. 96–104.

131. Данишевский В. В., Рыжков А. И. Нелинейные волны деформации в волокнистом композиционном материале в случае неидеального контакта между компонентами. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2014. № 3 (192). С. 10–17.

132. Данішевський В. В. Асимптотичні розв'язки задач мікромеханіки композитних матеріалів : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.17. Дніпропетровськ, 2008. 32 с.

133. Коханенко Ю. В. Исследование композитов, укрепленных прямоугольными волокнами, методом сетей. *Доклады Национальной академии наук Украины. Математика, естествознание, технические науки*. 1993. № 9. С. 60–64.

134. Криворучко А. Г., Шевельова А. Є., Лобода В. В. Антиплоска задача для п'єзоелектромагнітного біматеріалу з включенням на межі поділу середовищ. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 64–73.

135. Курпа Л. В., Шматко Т. В., Лінник Г. Б. Аналіз стійкості та коливань

пористых степеневих та сигмовидних функціонально-градієнтних сендвіч-пластин методом R-функцій. *Проблеми машинобудування*. 2023. Т. 26. № 4. С. 38–49.

136. Куш В. И. Напряженное состояние и эффективные упругие модули среды, армированной периодически расположенными сфероидальными включениями. *Прикладная механика*. 1995. Т. 31. № 3. С. 32–39.

137. Куш В. И. Эффективные упругие модули зернистого композита регулярной структуры с трансверсально-изотропными фазами. *Прикладная механика*. 2004. Т. 40. № 9. С. 123–130.

138. Мізерна О. Л., Гребенюк С. М., Клименко М. І. Визначення напружено-деформованого стану конструкцій з в'язкопружних волокнистих композиційних матеріалів на основі матриці жорсткості просторово-часового скінченного елемента // *Геотехнічна механіка : зб. наук. пр. Дніпро : ІГТМ ім. М. С. Полякова НАН України*, 2021. № 157. С. 140–151.

139. Руцицкий Я. Я. О чувствительности структурных моделей композитного материала к масштабным параметрам. *Прикладная механика*. 2006. Т. 42. № 12. С. 58–66.

140. Руцицкий Я. Я. Развитие микроструктурной теории двухфазных смесей применительно к композитным материалам. *Прикладная механика*. 2000. Т. 36. № 5. С. 33–65.

141. Хорошун Л. П. Математические модели и методы механики стохастических композитных материалов. *Прикладная механика*. 2000. Т. 36. № 10. С. 30–62.

142. Хорошун Л. П., Вецало Ю. А. К теории эффективных свойств идеально-пластических композитных материалов. *Прикладная механика*. 1987. Т. 23. № 1. С. 86–90.

143. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. Р. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев : Наукова думка, 1989. 208 с.

144. Andrianov I. V., Danishevs'kyu V. V. Load-transfer to an orthotropic

fibre-reinforced composite strip via an elastic element. *Technische Mechanik*. 2007. Vol. 27. Is. 1. P. 28–36.

145. Andrianov I. V., Danishevs'kyu V. V., Kholod E. G. Homogenization of viscoelastic composites with fibres of diamond-shaped cross-section. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223. Is. 5. P. 1093–1100.

146. Andrianov I. V., Danishevs'kyu V. V., Kirichuk O. U. Effective properties of viscoelastic fibre composites. *AIP Conference Proceedings*. 2010. Vol. 1281. Is. 1. P. 829-832.

147. Boguslavskaya A., Grebenyuk S., Klymenko M., Titova O. Application of the thermomechanical characteristics of the fiber-reinforced composite with anisotropic properties of the components. *International Journal of Mechanical Engineering and information technology*. 2018. Vol. 6. Is. 2. P. 1761–1766.

148. Bolshakov V. I., Danishevs'kyu V. V. Asymptotic multiscale modelling of heat conduction in fibre-reinforced composite material with imperfect bonding // *Aims for Future of Engineering Science : Proceedings the International Scientific Forum (Davos, 4-10 July, 2006)*. Davos : Davos Congress Centre, 2006. P. 97–107.

149. Bolshakov V. I., Danishevs'kyu V. V. Effective shear modulus and microscopic stresses in a fibre-reinforced composite materials with interphases // *Строительство, материаловедение, машиностроение : сб. науч. тр. / под общ. ред. В. И. Большакова. Днепропетровск : ПГАСА, 2006. Вып. 36. № 3. С. 167–173.*

150. Danishevskyu V. V. Asymptotic modelling of heat conduction in a particulate composite with imperfect contact between the components. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. Is. 10. P. 1052–1060.

151. Derevianko V. N., Danishevs'kyu V. V., Hryshko H. M. Asymptotic evaluation of effective transport coefficients and local fields distributions in fibre-reinforced composites // *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури : зб. наук. пр. Одеса : ОДАБА, 2016. № 62. С. 38–43.*

152. Derevianko V., Kondratieva N., Volkova V., Hryshko H. Technology of production of binder modifying nanoadditives. *Materials Science Forum*. 2021. Vol. 1045. P. 50–58.

153. Grebenyuk S., Klimenko M. Shear modulus of a fiber composite with a transtropic viscoelastic matrix and transtropic elastic fiber. *Проблеми машинобудування*. 2018. Т. 21. № 3. С. 47–53.

154. Kurpa L., Shmatko T. Parametric vibrations of axially compressed functionally graded sandwich plates with a complex plan form // *Mechanics and Physics of Structured Media* / eds. I. Andrianov, S. Gluzman, V. Mityushev. Academic Press, 2022. P. 213–232.

155. Kurpa L., Shmatko T., Linnik A. Buckling analysis of functionally graded sandwich plates resting on an elastic foundation and subjected to a nonuniform loading. *Mechanics of Composite Materials*. 2023. Vol. 59. Is. 4. P. 645–658.

156. Kurpa L., Shmatko T., Timchenko G. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method. *Composite Structures*. 2010. Vol. 93. Is. 1. P. 225–233.

157. Loboda V., Sheveleva A., Mykhail O. A slipping zone model for a conducting interface crack in a piezoelectric bimaterial // *Mechanics and Physics of Structured Media* / eds. I. Andrianov, S. Gluzman, V. Mityushev. Academic Press, 2022. P. 253–269.

158. Marchuk A. V., Nishchota A. V. On the strain-stress state of locally loaded layered composite slabs. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54. Is. 3. P. 315–330.

159. Marchuk O. V., Plisov O. O., Tamoyan T. G. Free vibrations of composite plates made of functionally graded material on an elastic or perfectly rigid foundation. *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 59. Is. 2. P. 225–237.

160. Marchuk A. V., Reneiskaya S. V., Leshchuk O. N. Three-dimensional analysis of the free vibrations of layered composite plates based on the semianalytic finite-element method. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. Is. 4. P. 481–497.

161. Piskunov V. G., Marchuk A. V., Il'chenko Ya. L. Free vibrations of thick layered cylindrical shells. *Mechanics of Composite Materials*. 2011. Vol. 47. No. 2. P. 177–184.



162. Shekhorkina S., Savytskyi M., Nikiforova T., Shliakhov K., Myslytska A. Calculation of the composite timberreinforcedconcrete bending elements considering the nonlinear work of the joint. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5. No. 7 (107). P. 14–21.

163. Snarskii A. A., Zhenirovskiy M. Effective conductivity of non-linear composites. *Physica B: Condensed Matter*. 2002. Vol. 322. Is. 1–2. P. 84–91.

164. Special issue on micromechanics of composite materials: Focus on Ukrainian research / A. N. Guz et al. *Applied Mechanics Reviews*. 1992. Vol. 45. Is. 2. P. 14–101.

165. Гребенюк С. М., Гоменюк С. І., Клименко М. І. Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації волокнистих композитів. Херсон : Гельветика, 2019. 350 с.

166. Гузь А. Н., Декрет В. А. Модель коротких волокон в теорії устойчивости композитов. Lambert Academic Publishing, 2015. 315 с.

167. Гузь А. Н., Руцицкий Я. Я., Гузь И. А. Введение в механику нанокompозитов. Киев : Издательский дом Академперіодика, 2010. 398 с.

168. Застосування полімерних композитів в агропромисловому комплексі : монографія / А. С. Кобець та ін. Дніпро : Журфонд, 2022. 356 с.

169. Каюк Я. Ф., Середенко В. М. Механіка міжфазової взаємодії композитних матеріалів. Черкаси : Наукове товариство імені Т. Г. Шевченка, 2005. 168 с.

170. Клименко М. І., Гребенюк С. М., Гоменюк С. І. Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів : монографія. Херсон : Видавничий дім «Гельветика», 2019. 300 с.

171. Композити з неорганічними люмінесцентними оксидами для агробіологічних та біомедичних застосувань : монографія / В. В. Бойко та ін. Київ : Ліра-К, 2021. 358 с.

172. Марчук О. В. Просторові задачі механіки деформування шаруватих тіл. Київ : Сталь, 2009. 124 с.

173. Полімерні композити нановуглець-метал: структура і електричні

властивості / Лазаренко О. А., Вовченко Л. Л., Овсієнко І. В., Мацуй Л. Ю. Київ – Вінниця : ТОВ «ТВОРИ», 2018. 200 с.

174. Полімерсилікатні композити на основі водорозчинних силікатів: технологія, морфологія, властивості та застосування : монографія / Левицький В. Є., Масюк А. С., Ганчо А. В., Скорохода В. Й. Львів : Львівська політехніка, 2019. 248 с.

175. Столярова А. В. Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами : монографія. Одеса : Видавничий дім «Гельветика», 2021. 104 с.

176. *Advances in Mechanics: Current Research Results of the NAS of Ukraine. Series: Advanced Structured Materials* // eds. A. N. Guz, H. Altenbach, V. Bogdanov, V. M. Nazarenko. Cham : Springer, 2023. Vol. 191. 585 p.

177. Національна академія наук України. Повідомлення НАН України. Вийшла друком унікальна монографія про сучасні здобутки українських науковців-механіків. URL: <https://www.nas.gov.ua/UA/Messages/Pages/View.aspx?MessageID=10723> (дата звернення: 29.03.2024).

178. Crighton D. G. Asymptotics – an indispensable complement to thought, computation and experiment in applied mathematical modelling // *Proceedings of the 7<sup>th</sup> European Conference on Mathematics in Industry* / eds. A. Fasano, M. B. Primicerio. Stuttgart : B. G. Teubner, 1994. P. 3–19.

179. Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск : ПГАСА, 2010. 216 с.

180. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. *Approximate models of mechanics of composites: An asymptotic approach* : monograph. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2023. 367 p.

181. Andrianov I. V., Manevitch L. I. *Asymptotology: ideas, methods, and applications*. Dordrecht : Kluwer, 2002. 270 p.

182. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1978. 700 p.

**ДОДАТОК А**  
**СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

*Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дослідження*

1. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Danishevs'kyu V. V., Tokarzewski S. Homogenization procedure and Padé approximants for effective heat conductivity of composite materials with cylindrical inclusions having square cross-section. *The Royal Society Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1999. Vol. 455. Is. 1989. P. 3401–3413 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).
2. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. Study of a non-linear oscillator under parametric impulsive excitation using a non-smooth temporal transformation. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 222. Is. 2. P. 307–328 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).
3. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Employment of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method in the elasticity theory for layered composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. Vol. 45. Is. 14. P. 3055–3060 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).
4. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Weicher D. Numerical investigation of 1D continuum dynamical models of discrete chain. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 92. Is. 11–12. P. 945–954 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q2).
5. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Three-phase model for a fiber-reinforced composite material. *Composite Structures*. 2013. Vol. 95. P. 95–104 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).
6. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Application of an improved three-phase model to calculate effective characteristics for a composite with

cylindrical inclusions. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. No. 1. P. 197–222 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q2).

7. Andrianov I. V., Kalamkarov A. L., Starushenko G. A. Analytical expressions for effective thermal conductivity of composite materials with inclusions of square cross-section. *Composites: Part B*. 2013. Vol. 50. P. 44–53 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

8. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part I: Application of the boundary shape perturbation method. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 154–177 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

9. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Starushenko G. A. Three-phase model for a composite material with cylindrical circular inclusions. Part II: Application of Padé approximants. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 78. P. 178–191 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

10. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic analysis of the Maxwell Garnett formula using the two-phase composite model. *International Journal of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 7. No. 02. P. 1550025-1–1550025-27 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q2).

11. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Markert B., Starushenko G. A. Analytical homogenization for dynamic analysis of composite membranes with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2017. Vol. 17. Is. 5. P. 1740015-1–1740015-14 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

12. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models and transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part I:

Square lattice of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 179. P. 617–627 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

13. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Asymptotic models for transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites. Part II: Square lattices of rhombic inclusions and hexagonal lattices of circular inclusions. *Composite Structures*. 2017. Vol. 180. P. 351–359 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

14. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S., Khajiyeva L. The Verhulst-like equations: integrable ODE and ODE with chaotic behavior. *Symmetry*. 2019. Vol. 11. Is. 12. P. 1446 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q2).

15. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part I: using the Schwarz alternating method. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 4971–4990 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

16. Andrianov I. I., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibers. Part II: using Padé approximants. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Is. 12. P. 5145–5157 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q1).

17. Andrianov I., Koblik S., Starushenko G. Transition from discrete to continuous media: the impact of symmetry changes on asymptotic behavior of waves. *Symmetry*. 2021. Vol. 13. Is. 6. P. 1008 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q2).

18. Andrianov I. I., Andrianov I. V., Starushenko G. A., Borodin E. I. Higher order asymptotic homogenization for dynamical problems. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 27. Is. 9. P. 1672–1687 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*, квартиль Q2).

19. Andrianov I. V., Koblik S. G., Starushenko G. A., Kudaibergenov A. K. On aspects of gradient elasticity: Green's functions and concentrated forces. *Symmetry*. 2022. Vol. 14. Is. 2. P. 188 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).

20. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Non-stationary heat transfer in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures. *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. Is. 4. P. 1339–1350 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).

21. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A., Kvitka S. A. Effective heat conductivity of a composite with hexagonal lattice of perfectly conducting circular inclusions: An analytical solution. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 102. Is. 11. P. e202200216 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*, квартал Q2).

22. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Starushenko G. A. Approximate models of mechanics of composites: An asymptotic approach : monograph. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2023. 367 p. (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Scopus*).

23. Старушенко Г. А. Асимптотические методы и модели в теории композитных материалов : монография. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2021. 696 с.

24. Pilipchuk V. N., Starushenko G. A. A version of non-smooth transformations for one-dimensional elastic systems with a periodic structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1997. Vol. 61. Is. 2. P. 265–274 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*).

25. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Tokarzewski S. Homogenization procedure and Padé approximations in the theory of composite materials with parallelepiped inclusions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1998. Vol. 41. Is. 1. P. 175–181 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus i Web of Science*).

26. Starushenko G., Krulik N. Saw-tooth argument transformation method in

the theory of composite materials // Progress and Trends in Rheology V : Proceedings of the Fifth European Rheology Conference (Portorož, September 6-11, 1998) / ed. I. Emri. Heidelberg, 1998. P. 120–121 (видання включено до міжнародної наукометричної бази Web of Science).

27. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Danishevskyy V. V. Asymptotic determination of the effective thermal conductivity of a pile field. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1999. Vol. 36. Is. 1. P. 31–36 (видання включено до міжнародної наукометричної бази Scopus, квартиль Q4).

28. Tokarzewski S., Andrianov I., Danishevsky V., Starushenko G. Analytical continuation of asymptotic expansions of effective transport coefficients by Padé approximants. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2001. Vol. 47. Is. 4. P. 2283–2292 (видання включено до міжнародних наукометричних баз Scopus i Web of Science, квартиль Q3).

29. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Weichert D. Asymptotic analysis of thin interface in composite materials with coated boundary. *Technische Mechanik*. 2011. Vol. 31. No. 1. P. 33–41 (видання включено до міжнародної наукометричної бази Scopus).

30. Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W., Starushenko G. Effective conductivity and critical properties of a hexagonal array of superconducting cylinders // Contributions in Mathematics and Engineering. In Honor of Constantin Carathéodory / eds. P. M. Pardalos, T. M. Rassias. Switzerland : Springer International Publishing, 2016. P. 255–297 (видання включено до міжнародної наукометричної бази Scopus).

31. Kalamkarov A. L., Andrianov I. V., Pacheco P. M. C. L., Savi M. A., Starushenko G. A. Asymptotic analysis of fiber-reinforced composites of hexagonal structure. *Journal of Multiscale Modelling*. 2016. Vol. 07. No. 03. P. 1650006-1–1650006-32 (видання включено до міжнародної наукометричної бази Web of Science).

32. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Gabrinets V. A. Percolation threshold for elastic problems: self-consistent approach and Padé approximants // Advances in

mechanics of microstructured media and structures / eds. F. dell’Isola, V. Eremeyev, A. V. Porubov. Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. Vol. 87. P. 35–42 (видання включено до міжнародних наукометричних баз Scopus i Web of Science, квартиль Q3).

33. Kalamkarov A., Andrianov I., Starushenko G. Refinement of the Maxwell formula for fiber-reinforced composites. *Journal of Multiscale Modelling*. 2020. Vol. 11. No. 01. P. 1950001-1–1950001-33 (видання включено до міжнародних наукометричних баз Scopus i Web of Science).

34. Andrianov I. V., Starushenko G. A., Kvitka S. A. Calculation of effective characteristics of a 2D composite with rhombic voids using an inhomogeneous cell model. *Symmetry*. 2023. Vol. 15. Is. 3. P. 646 (видання включено до міжнародних наукометричних баз Scopus i Web of Science).

35. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Koblik S. G., Starushenko G. A. Nonlinear oscillation of a microbeam due to an electric actuation – comparison of approximate models. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2023. Vol. 104. Is. 2. P. e202300091 (видання включено до міжнародних наукометричних баз Scopus i Web of Science).

36. Andrianov I. V., Koblik S. G., Starushenko G. A. Investigation of electrically actuated geometrically nonlinear clamped circular nanoplate. *Acta Mechanica*. 2024. Vol. 235. Is. 2. P. 1015–1026 (видання включено до міжнародних наукометричних баз Scopus i Web of Science).

***Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації***

37. Андрианов И. В., Старушенко Г. А. Эффективные изгибные характеристики пластин из композитных материалов // Прочность, жесткость, технологичность изделий из композиционных материалов : Труды III Всесоюзной конференции (г. Запорожье, 24-26 октября 1989 г.). Запорожье, 1989. С. 10.

38. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic methods in the theory of perforated media // Proceedings of the 30th Polish Solid Mechanics Conference



(Zakopane, September 5-9, 1994). Zakopane, 1994. P. 39.

39. Andrianov I. V., Starushenko G. A. New analytical approaches in the theory of composite materials // Annual Scientific Conference Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (Prague, May 27-31, 1996). Prague, 1996. P. 10.

40. Andrianov I. V., Danishevsky V. V., Starushenko G. A., Tokarzewski S. Asymptotic approach, multi-point Pade and quasifractional approximations in the theory of composite materials // Book of Abstracts of the 3rd EUROMECH Solid Mechanics Conference (Stockholm, August 18-22, 1997). Stockholm, 1997. P. 27.

41. Andrianov I., Starushenko G., Danishevsky V. Asymptotic approximation of effective heat conductivity of composite materials with large diamond fibre inclusions // Book of Abstracts of the X International Conference on Mechanics of Composite Materials (Riga, April 20-23, 1998). Riga, 1998. P. 19.

42. Старушенко Г. А., Крулик Н. А. Метод несимметричного пилообразного преобразования аргумента в теории композитных материалов // Наука і освіта '98 : матеріали Першої міжнародної конференції (м. Дніпропетровськ, 23-30 квітня 1998 р.). Дніпропетровськ, 1998. Т. 8. Фізико-математичні науки. Технічні науки. С. 326.

43. Starushenko G., Krulik N. About elasticity theory periodic task solutions representation by the special non-smooth variable transformation // Наука і освіта '98 : матеріали Першої міжнародної конференції (м. Дніпропетровськ, 23-30 квітня 1998 р.). Дніпропетровськ, 1998. Т. 10. Фізико-математичні науки. Технічні науки. С. 413.

44. Andrianov I., Starushenko G., Tokarzewski S. Asymptotic investigation of effective transport properties of composite materials // Volume of Abstracts of the 32nd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1998). Zakopane, 1998. P. 47–48.

45. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Employment of non-symmetrical saw-tooth argument transformation method in the elasticity theory for flaky composites // Volume of Abstracts of the 32nd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1998). Zakopane, 1998. P. 351–352.

46. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Stieltjes integral representation for torsion moduli of bars reinforced with cylindrical fibres // Volume of Abstracts of the 32nd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1998). Zakopane, 1998. P. 71.

47. Tokarzewski S., Starushenko G., Andrianov I. Analytical continuation of effective transport coefficients expanded at zero and infinity // Abstracts of the International Conference on Rational Approximation (Antwerp, June 6-11, 1999). Antwerp, 1999. P. 11.

48. Andrianov I., Danishevskyy V., Tokarzewski S., Starushenko G. Pade approximants for effective properties of composite materials // Book of Abstracts of the 4th EUROMECH Solid Mechanics Conference (Metz, June 26-30, 2000). Metz, 2000. P. 242.

49. Tokarzewski S., Andrianov I., Starushenko G., Danishevskyy V. Analytical continuation of asymptotic expansions of effective transport properties // Abstracts of the Third World Congress of Nonlinear Analysts (Catania, July 19-26, 2000). Catania, 2000. P. 648.

50. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Description of periodic processes by special smooth-linear argument transformation // Volume of Abstracts of the 33rd Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 1-5, 2000). Zakopane, 2000. P. 375–376.

51. Старушенко Г. А., Крулик Н. А. Анализ и взаимодействие асимптотических методов в периодических задачах теории композитов // Україна наукова '2001 : матеріали Першої Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 25-27 червня 2001 р.). Дніпропетровськ, 2001. Т. 3. Технічні та фізико-математичні науки. С. 10–11.

52. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Ларионов Г. И. Периодические решения плоской задачи теории слоистых композитов // Україна наукова '2001 : матеріали Першої Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 05-07 листопада 2001 р.). Дніпропетровськ, 2001. Т. 8. Технічні науки. С. 51–53.

53. Старушенко Г. А., Крулик Н. А. Дослідження згинання стрижня на дискретних лінійно-пружних опора // Україна наукова '2002 : матеріали Другої Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 10-24 травня 2002 р.). Дніпропетровськ, 2002. Т. 13. Фізико-математичні та технічні науки. С. 28–29.

54. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Investigation and analysis of a periodic problem for a layered composite structure on an elastic foundation by means of a no smooth argument transformation method // Book of Abstracts of the XII International Conference on Mechanics of Composite Materials (Riga, June 9-13, 2002). Riga, 2002. P. 195.

55. Старушенко Г. А. Неоднородная модель в задачах теплопроводности периодических неоднородных структур // Динаміка наукових досліджень : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 28 жовтня – 4 листопада 2002 р.). Дніпропетровськ, 2002. Т. 2. Архітектура. Механіка. С. 35–36.

56. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е., Андрианов И. В. Анализ трехфазной модели периодических задач теории упругости // Математичні проблеми технічної механіки : матеріали Третьої Всеукраїнської наукової конференції (м. Дніпродзержинськ, 20-23 квітня 2003 р.). Дніпродзержинськ, 2003. С. 134.

57. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Рогоза Б. Е. Асимптотический анализ периодических решений на основе специального негладкого преобразования аргумента // Україна наукова '2003 : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 16-20 червня 2003 р.). Дніпропетровськ, 2003. Т. 30. Технічні науки. Математика. С. 28–29.

58. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Рогоза Б. Е. Применение метода специального негладкого преобразования аргумента к исследованию слоистого композитного массива на комбинированном упругом основании // Динаміка наукових досліджень '2005 : матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (м. Дніпропетровськ, 20-30 червня 2005 р.). Дніпропетровськ, 2005. Т. 51. Технічні науки. С. 42–45.

59. Starushenko G., Rogoza B. At inhomogeneous model for effective transport properties of highly contrasting composite materials // Book of Abstracts of the XV International Conference on Mechanics of Composite Materials (Riga, May 26-30, 2008). Riga, 2008. P. 253–254.

60. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Габринец В. А., Бывалин Д. Н. Эффективный коэффициент теплопроводности композитного материала, пригодный для любых значений параметров // Прочность материалов и элементов конструкций : материалы Международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика НАН Украины Г. С. Писаренко (г. Киев, 28-30 сентября 2010 г.). Киев, 2010. Т. 1. С. 14–15.

61. Andrianov I., Markert B., Starushenko G. Linear and nonlinear waves in lattice structures: continualization and discrete effects // Book of Abstracts of the 8th European Nonlinear Oscillations Conference (Vienna, July 6-11, 2014). Vienna, 2014. Paper-ID 231. P. 114.

62. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S. Estimations of the effective heat conductivity of a composite with hexagonal lattice of perfectly conducting circular inclusions // Constructive Methods in the Theory of Composite and Porous Media : Abstracts at the 13th ISAAC Congress (Ghent, August 2-6, 2021). Ghent, 2021. P. 53.

63. Andrianov I., Starushenko G., Kvitka S. Homogenization of transport properties of densely packed, high-contrast fibre composites: analytical solution of cell problem // Mechanics of High-Contrast Elastic Composites : Abstracts at EUROMECH Colloquium 626 (Keele, September 6-8, 2021). Keele, 2021. P. 7.

64. Andrianov I., Awrejcewicz J., Starushenko G., Kvitka S. Thermal waves in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures // Dynamical Systems – Theory and Applications : Abstracts at the 16th International Conference (Lodz, December 6-9, 2021). Lodz, 2021. P. 491–492.

65. Старушенко Г. А. Нестационарный теплообмен в композитных мембранах // Энергетичний менеджмент: стан та перспективи розвитку – REIMS'2022 : матеріали Міжнародної науково-технічної та навчально-методичної конференції (м. Київ, 15-17 листопада 2022 р.). Київ, 2022. С. 79–81.

66. Старушенко Г. А. Ефективна теплопровідність високопровідних щільно упакованих композитів // Проблеми надійності та міцності машин і споруд : матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (м. Харків, 11-12 травня 2023 р.). Харків, 2023. С. 52–55.

***Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації***

67. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Application of the averaging method for the calculation of perforated plates. *Soviet Applied Mechanics*. 1988. Vol. 24. Is. 4. P. 410–415 (видання включено до міжнародних наукометричних баз *Scopus* і *Web of Science*).

68. Старушенко Г. А. Исследование изгиба пластины, ослабленной малыми отверстиями. *Динамика и прочность машин*. Харьков : Вища школа, 1988. Вып. 47. С. 34–40.

69. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Solution of dynamic problem for perforated structures by the method of averaging. *Journal of Soviet Mathematics*. 1991. Vol. 57. Is. 5. P. 3410–3412 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Scopus*).

70. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Application of the averaging method to the study of oscillations of a perforated plate. *Journal of Soviet Mathematics*. 1993. Vol. 65. Is. 2. P. 1503–1507 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Scopus*).

71. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic methods in the theory of perforated membrane of nonhomogeneous structure // Proceedings of the 30th Polish Solid Mechanics Conference (Zakopane, September 5-9, 1994). Warsaw : Engineering Transactions. 1995. Vol. 43. No. 1–2. P. 5–18.

72. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Homogenization procedure and Pade approximations in the theory of periodically nonhomogenous media // Proceedings of the International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering (Warsaw, September 25-29, 1995). Warsaw, 1995. Vol. 1. P. 494–495.

73. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Infinite sequence of basic

estimations for the effective moduli of composite materials // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 4th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, July 8-15, 1996)*. Warsaw, 1996. No. 4. Vol. 2. P. 148–158.

74. Пилипчук В. Н., Старушенко Г. А. О представлении периодических решений дифференциальных уравнений посредством косоугольно-пилообразного преобразования аргумента. *Доповіди Національної академії наук України*. 1997. № 11. С. 25–28.

75. Pilipchuk V. N., Volkova S. A., Starushenko G. A. An analytical technique for modeling of processes generated by a pulsed forcing // *III Szkola Geomechaniki : Materialy Konferencyjne (Gliwice – Ustron, November 23-26, 1997)*. Gliwice, 1997. P. 155–161.

76. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Asymptotic expansion of the bulk conductivities of heterogeneous media // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 5th Ukrainian – Polish seminar (Dnipropetrovsk, June 30 – July 7, 1997)*. Warsaw, 1997. No. 5. P. 426–439.

77. Tokarzewski S., Galka A., Starushenko G. Rigorous bounds on the asymptotic expansion of effective transport coefficients of two-phase media. *Archives of Mechanics*. 1997. Vol. 49. № 4. P. 647–663.

78. Андрианов И. В., Старушенко Г. А. Использование трехфазной модели для определения эффективных характеристик композитов с любыми периодическими кубическими включениями. *Доповіди Національної академії наук України*. 1997. № 1. С. 52–56.

79. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Галка А. Метод пилообразного преобразования аргумента в периодических задачах теории слоистых композитов // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 6th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, July 6-11, 1998)*. Warsaw, 1998. No. 6. P. 551–556.

80. Tokarzewski S., Andrianov I., Starushenko G. Pade bounds for the effective coefficients of nonlinear temperature-dependent periodic composites // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 6th Ukrainian – Polish seminar*

(Warsaw, July 6-11, 1998). Warsaw, 1998. No. 6. P. 349–356.

81. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Данишевский В. В. Асимптотическое представление эффективного коэффициента теплопроводности композитного материала с волокнистыми включениями ромбовидной формы большого размера. *Диференціальні рівняння та їх застосування*. Дніпропетровськ, 1998. С. 46–52.

82. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Данишевский В. В. Асимптотическое определение эффективного коэффициента теплопроводности свайного поля. *Основания, фундаменты и механика грунтов*. 1999. № 1. С. 26–29.

83. Старушенко Г. А., Крулик Н. А., Токаржевский С. Описание и исследование периодических структур посредством техники негладкого преобразования аргумента // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 7th Ukrainian – Polish seminar (Dnepropetrovsk, June 24-29, 1999)*. Warsaw, 1999. No. 7. P. 169–174.

84. Andrianov I., Starushenko G., Tokarzewski S. Torsion of a non-homogeneous bar with periodic parallelepiped inclusions: analytical expressions for effective shear modulus. *Technische Mechanik*. 1999. Vol. 19. No. 1. P. 5–12.

85. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. About representation of theory tasks periodic solutions on basis of non-smooth argument transformation. *Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Is. 4 (special issue: “ICER '99”). P. 115–120 (видання включено до міжнародної наукометричної бази *Web of Science*).

86. Andrianov I., Danishevskii V., Starushenko G., Tokarzewski S. Asymptotic representation for the effective heat conductivity of a composite material with fibrous diamond-shaped inclusions. *Mechanics of Solids*. 2000. Vol. 35. Is. 4. P. 73–82.

87. Старушенко Г., Крулик Н., Токаржевский С. Периодическая задача для слоистого композитного массива на дискретном упругом основании // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 8th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, 26-30 June, 2000)*. Warsaw, 2000. No. 8. P. 534–539.

88. Старушенко Г., Крулик Н., Токаржевский С. Негладкое

преобразование системы в случае медленно изменяющейся нагрузки при изгибе стержня на периодически расположенных опорах // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 9th Ukrainian – Polish seminar (Dnepropetrovsk, 27 June – 01 July, 2001)*. Warsaw, 2001. No. 9. P. 169–174.

89. Старушенко Г., Крулик Н., Токаржевский С. Исследование и анализ периодической задачи для слоистой композитной структуры на упругом основании с помощью метода негладкого преобразования аргумента // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 10th Ukrainian – Polish seminar (Warsaw, June, 2002)*. Warsaw, 2002. No. 10. Vol. II. P. 803–808.

90. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Investigation of rod bending on discrete linear elastic props // *Proceedings of the International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering (Warsaw, June 24-28, 2002)*. Warsaw, 2002. Vol. 8. P. 348–351.

91. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е., Андрианов И. В. Анализ трехфазной модели периодических задач теории упругости. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2003. Вип. 4. № 27. С. 99–103.

92. Starushenko G., Krulik N., Rogoza B., Tokarzewski S. Description of periodic processes by special smooth-linear argument transformation // *Theoretical Foundation of Civil Engineering : Proceeding of 11th Ukrainian – Polish seminar (Dnepropetrovsk, June 23-27, 2003)*. Warsaw, 2003. No. 11. P. 241–248.

93. Starushenko G., Krulik N., Tokarzewski S. Investigation and analysis of periodic problem for layered composite structure on periodic foundation by means of non-smooth argument transformation method // *Proceedings of the Second International Conference of Engineering Rheology ICER 2003 (Zielona Góra, August 24-27, 2003)*. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2003. Is. 8 (spec). P. 169–177.

94. Starushenko G., Krulik N., Rogoza B. Bending of a bar on a discrete elastic foundation. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2005. Вип. 3. № 38. С. 150–162.

95. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е. Обзор и анализ применения трехфазной



моделі в механіці композитів. Ч. I. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2007. Вип. 5. № 52. С. 3–10.

96. Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е. Обзор и анализ применения трехфазной модели в механике композитов. Ч. II. *Системні технології*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 1. № 54. С. 3–12.

97. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Бывалин Д. Н. Численное исследование применимости уточненных моделей сплошной среды для описания пространственно-одномерных линейных волновых процессов. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 12. С. 3–11.

98. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Рогоза Б. Е. Применение асимптотических приближений теории смазки к исследованию композитных структур. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 9. С. 3–16.

99. Andrianov I. V., Starushenko G. A. Asymptotic analysis of strongly anisotropic solids. *Technische Mechanik*. 2008. Vol. 28. No. 2. P. 121–125.

100. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Бывалин Д. Н. Двухфазная модель композита с цилиндрическими включениями малого размера. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 20–43.

101. Andrianov I., Starushenko G., Awrejcewicz J. Numerical investigation of nonlocal theory of elasticity models for 1D linear wave processes // *Dynamical Systems – Theory and Application // Proceedings of the 10th Conference on Dynamical Systems (Lodz, December 7-10, 2009)*. Lodz, 2009. No. 1. P. 123–126.

102. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Бывалин Д. Н. Анализ двухфазной модели композита с цилиндрическими включениями малого размера. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 44–55.

103. Андрианов И. В., Старушенко Г. А., Габринец В. А., Бывалин Д. Н. Эффективный коэффициент теплопроводности композитного материала,

пригодный для любых значений параметров // Прочность материалов и элементов конструкций : Труды Международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика НАН Украины Г. С. Писаренко (г. Киев, 28-30 сентября 2010 г.). Киев : ИПП НАН Украины, 2011. С. 162–169.

104. Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Markert B., Starushenko G. A. On the vibrations of a composite structure with hexagonal structure of a circular inclusions // Dynamical systems – Mechatronics and Life Sciences / eds. J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak, J. Mrozowski, P. Olejnik. Łódź : Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics, 2015. P. 11–22.

**ДОДАТОК Б**  
**ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. III Всесоюзна конференція «Міцність, жорсткість, технологічність виробів із композиційних матеріалів» (м. Запоріжжя, Україна, 24–26 жовтня 1989 р.).
2. 30-а Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 5–9 вересня 1994 р.).
3. Міжнародна конференція «Легковагі конструкції в цивільному будівництві» (м. Варшава, Польща, 25–29 вересня 1995 р.).
4. Щорічна наукова конференція з математики й механіки (GAMM) (м. Прага, Чеська Республіка, 27–31 травня 1996 р.).
5. 4-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Варшава, Польща, 8–15 липня 1996 р.).
6. 3-я Європейська конференція з механіки твердого тіла (EUROMECH) (м. Стокгольм, Швеція, 18–22 серпня 1997 р.).
7. 5-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Дніпропетровськ, 30 червня – 7 липня 1997 р.).
8. Міжнародна конференція «III школа геомеханіки» (м. Глівіце, Польща, 23–26 листопада 1997 р.).
9. X Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 20–23 квітня 1998 р.).
10. Перша міжнародна конференція «Наука і освіта '98». Фізико-математичні науки. Технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Одеса – м. Кривий Ріг – м. Київ – м. Харків – м. Дніпродзержинськ, Україна, 23–30 квітня 1998 р.).
11. 6-й Польсько-Український семінар «Теоретичні основи цивільного будівництва» (м. Варшава, Польща, 6–11 липня 1998 р.).
12. 32-а Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 5–9 вересня 1998 р.).
13. 5-а Європейська реологічна конференція (м. Порторож, Словенія,

6 – 11 вересня 1998 р.).

14. Міжнародна конференція з раціональних апроксимацій (м. Антверпен, Бельгія, 6–11 червня 1999 р.).

15. 7-й Польсько-Український семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 24–29 червня 1999 р.).

16. Міжнародна конференція з інженерної реології (ICER '99) (м. Зелена Гора, Польща, 27–30 червня 1999 р.).

17. 8-й Польсько-Український семінар (м. Варшава, Польща, 26–30 червня 2000 р.).

18. 4-а Європейська конференція з механіки твердого тіла (EUROMECH) (м. Мец, Франція, 26–30 червня 2000 р.).

19. Третій всесвітній конгрес з нелінійного аналізу (м. Катанія, Італія, 19 – 26 липня 2000 р.).

20. 33-я Польська конференція з механіки твердого тіла (м. Закопане, Польща, 1-5 вересня 2000 р.).

21. Перша всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2001». Технічні та фізико-математичні науки (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Донецьк – м. Слов'янськ, Україна, 25 – 27 червня 2001 р.).

22. 9-й Польсько-Український семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 27 червня – 1 липня 2001 р.).

23. Перша всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2001». Технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Суми, Україна, 5–7 листопада 2001 р.).

24. Друга всеукраїнська науково-практична конференція «Україна наукова '2002». Фізико-математичні та технічні науки (м. Дніпропетровськ – м. Черкаси – м. Львів, Україна, 10–24 травня 2002 р.).

25. XII Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 9–13 червня 2002 р.).

26. 10-й Польсько-Український семінар (м. Варшава, Польща, червень

2002 р.).

27. Міжнародна конференція «Легковагі конструкції в цивільному будівництві» (м. Варшава, Польща, 24–28 вересня 2002 р.).

28. Міжнародна науково-практична конференція «Динаміка наукових досліджень». Архітектура. Механіка. (м. Дніпропетровськ – м. Дніпродзержинськ – м. Харків, Україна, 28 жовтня – 4 листопада 2002 р.).

29. Третя всеукраїнська наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (м. Дніпродзержинськ, Україна, 20–23 квітня 2003 р.).

30. Міжнародна науково-практична конференція «Україна наукова '2003». Технічні науки. Математика (м. Дніпропетровськ – м. Запоріжжя, Україна, 16 – 20 червня 2003 р.).

31. XI Українсько-польський семінар (м. Дніпропетровськ, Україна, 23 – 27 червня 2003 р.).

32. II Міжнародна конференція з інженерної реології (м. Зелена Гора, Польща, 24–27 серпня 2003 р.).

33. VIII Міжнародна науково-практична конференція «Динаміка наукових досліджень '2005». Технічні науки (м. Дніпропетровськ, Україна, 20–30 червня 2005 р.).

34. XV Міжнародна конференція з механіки композитних матеріалів (м. Рига, Латвія, 26 – 30 травня 2008 р.).

35. X Міжнародна конференція з динамічних систем (м. Лодзь, Польща, 7 – 10 грудня 2009 р.).

36. Міжнародна науково-технічна конференція «Міцність матеріалів та елементів конструкцій», присвячена 100-літтю з дня народження академіка НАН України Г. С. Писаренка (м. Київ, Україна, 28–30 вересня 2010 р.).

37. VIII Європейська конференція з нелінійної динаміки (м. Відень, Австрія, 6–11 липня, 2014 р.).

38. XIII Міжнародна конференція «Динамічні системи – теорія та прикладання» (DSTA) (м. Лодзь, Польща, 7–10 грудня 2015 р.).

39. 13-й Онлайн-конгрес Міжнародного товариства аналізу, його

застосування та обчислення (ISSAC) «Конструктивні методи в теорії композитних і пористих середовищ» (м. Гент, Бельгія, 2–6 серпня 2021 р.).

40. Колоквіум Євромех (EUROMECH Colloquium) 626 «Механіка висококонтрастних еластичних композитів (м. Кіль, Велика Британія, 6–8 вересня 2021 р.).

41. 16-а Міжнародна конференція «Динамічні системи – теорія та прикладання» (DSTA) (м. Лодзь, Польща, 6–9 грудня 2021 р.).

42. Міжнародна науково-технічна та навчально-методична конференція «Енергетичний менеджмент: стан та перспективи розвитку – PEMS'2022» (м. Київ, Україна, 15-17 листопада 2022 р.).

43. Всеукраїнська науково-практична конференція «Проблеми надійності та міцності машин і споруд» (м. Харків, Україна, 11-12 травня 2023 р.).

**ДОДАТОК В**  
**ВІДОМОСТІ ПРО НАУКОВУ ДОПОВІДЬ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ**  
**ДИСЕРТАЦІЇ НА СЕМІНАРІ «MATERIALICA+ RESEARCH GROUP»**  
**(ПОЛЬЩА)**



**Conclusion on the results of the online seminar**  
**Materialica+ Research Group (Krakow, Poland)**  
**20 December 2023**

**Chairman:** Prof. Mityushev V.

**Academic secretary:** Dr. Sc. Ryłko N.

**Participants:** S. Gluzman, I. Andrianov, O. Bar, P. Drygaś, W. Nawalaniec, R. Czapla, Zh. Zhunussova, K. Dosmagulova, K. Rajchel, P. Kurtyka, T. Ligocki, M. Stawiarz.

**Agenda:** scientific report by prof. Starushenko G.A. based, on a set of articles published in journals classified as the first and second quartiles (Q1 and Q2).

The scientific report revealed the essence of the scientific and applied problem under consideration, substantiated the relevance of the research topic, outlined the goals and objectives of the research, determined the scientific novelty, theoretical and practical significance of the results obtained, provided data on publications and testing of the research results.

Five participants of the seminar people took part in the discussion of the scientific report.

Prof. Starushenko G. A. was asked the following questions:

1. What are the fundamental differences between the use of a three-phase model in combination with the method of perturbation of the shape of the boundary from the classical three-phase model?
2. What are the advantages of the modified three-phase composite model from a physical point of view?
3. Which composite model is most effective in the case of medium-sized inclusions?
4. How were the parameters for matching asymptotic expansions determined?
5. What are the advantages of the sawtooth argument method?
6. Can you compare the found two-sided estimates of the asymptotics of the effective parameter for a composite of a hexagonal structure with the Hashin–Shtrikman estimates?
7. What physical considerations underlie the lubrication theory method?

8. How were the limits of applicability of the models you built and the accuracy of the solutions obtained determined?
9. Does the solution obtained by the Schwarz–Padé method satisfy the Keller theorem?
10. How is the two-phase model of a fiber composite with small inclusions of a square shape mathematically described?
11. How was the shape of the inclusions of the composite taken into account when constructing higher approximations of Maxwell’s formula?
12. Explain the concept of physical equivalence of composite structures.
13. Is it possible to use the method of asymmetric sawtooth argument transformation to describe periodic concentrated loads?
14. What possibilities exist for generalizing the method of nonsmooth transformation of an argument?
15. What are the engineering applications of your research?

Prof. Starushenko G. A. answered all the questions completely and reasonably.

**Conclusion:** In research provided by prof. Starushenko G. A. the following results are obtained:

- various models suitable for correctly determining the effective characteristics of the composite materials have been constructed, analytically described and justified;
- a study was carried out on the range of applicability of models depending on physical and geometric parameters;
- asymptotic expressions for the effective characteristics of the composite were obtained in limiting cases of its geometric sizes and physical properties;
- analytical expressions described the averaged coefficients of the composite for any values of its physical and geometric characteristics are proposed;
- an asymptotic and numerical analysis of the obtained relations was performed, the limits of their applicability and two-sided estimates were found.

Solutions to a wide class of problems in the theory of composites are obtained by constructing adequate models:

- a three-phase model of a composite with circle inclusions was developed and its generalizations were implemented using the boundary shape perturbation method and Padé approximations;
- a modified three-phase model was used to describe the effective characteristics of a composite with cylindrical inclusions;
- the method of perturbation of the shape of the boundary was used to construct a three-phase model of a composite with square inclusions;



- a method has been developed for determining the effective thermal conductivity coefficient by matching of limiting asymptotic expansions;
- constitutive relations were constructed and an asymptotic analysis of the local problem for 2D composites of hexagonal structure was carried out;
- analytical homogenization was used in the dynamic analysis of a composite membrane of a hexagonal structure with circle inclusions;
- models of lubrication theory were built for densely packed highly conductive composites with inclusions of various shapes;
- based on the method of non-smooth argument transformation, a mathematical apparatus was developed to describe composites with a thin interface at the phase boundary;
- models of two-phase fiber composites for inclusions of different shapes and contact conditions “inclusion - matrix” are described;
- an analysis of models of two-phase fiber composites was carried out based on approximations of asymptotically equivalent functions;
- an asymptotic analysis of Maxwell’s formula was performed based on a two-phase composite model for structures with circle and square inclusions;
- generalizing relations of the Maxwell formula for a composite with circle inclusions were constructed using the Schwarz iterative procedure and the Padé approximation technique.

Presented by Prof. Starushenko G. A. scientific report was written on a current topic, has theoretical significance in terms of the development of fundamental concepts of the theory of composites. Obtained results have practical value and a wide scope of engineering applications.

The scientific novelty of the research is determined by the development of asymptotic methods and models that make it possible to describe the state of a composite material in the region of limiting values of its physical and geometric characteristics, and the analytical relationships obtained on their basis.

The reliability of the results obtained is fully confirmed by comparison in particular cases with analytical, asymptotic, numerical and experimental data of other researchers, the use of rigorous mathematical apparatus, a correctly carried out analysis of the solutions obtained, and their clear physical essence.

The main provisions, results and conclusions of the scientific report of prof. Starushenko G. A. are displayed in 21 articles published in journals of the first and second quartiles in accordance with the SCImago Journal and Country Rank classification.

Scientific report by Prof. Starushenko G. A., based on the articles published in journals classified as the first and second quartiles (Q1 and Q2), meets the conditions required for dissertations for the degree of Doctor of Science.

Open voting results:  
for the decision – 14;  
against – no;  
abstained – no.  
The decision was made unanimously.

Chairmen:

**POLITECHNIKA KRAKOWSKA**  
*im. Tadeusza Kościuszki*  
Wydział Informatyki i Telekomunikacji  
*Katedra Matematyki Stosowanej*  
31-155 Kraków, ul. Warszawska 24  
tel. (12) 634-22-83, (12) 628-29-88

Mityushev V. (Mitiuszew W.)

Academic secretary:



Rylko N.

# ДОДАТОК Г

## ВІДОМОСТІ ПРО ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ У ПРОЕКТІ НАЦІОНАЛЬНОГО НАУКОВОГО ЦЕНТРУ ПОЛЬЩІ



**Lodz University of Technology**  
Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics

Łódź, June 10th, 2022

### Certificate of participation in project funded by the National Science Centre (Poland)

It is hereby confirmed that Dr. Galina A. Starushenko participated as a co-executor in research grant OPUS 14 N. 2017/27/B/ST8/01330 funded by the Polish National Science Centre.

Dr. Starushenko was involved in the research related to the following topics:

1. Using of three-phase composite model with asymptotic homogenization theory
2. Three-phase composite model with the boundary shape perturbation method
3. Generalization of a three-phase composite model using Padé approximations
4. Modified three-phase composite model
5. Application of lubrication approach to composites with cylindrical inclusions of a square profile
6. The effective characteristics of 3D composite structures
7. Homogenized thermal conductivity of 2D composites of hexagonal structure
8. Natural vibrations of composite membranes
9. Using of asymptotically equivalent functions for analysis of composite structures
10. Asymptotic models of two-phase fibrous composites
11. Percolation threshold for elastic problems
12. Construction of corrections to the Maxwell formula
13. Gradient elasticity: Green's functions and concentrated forces
14. The Verhulst-Like equations: chaotic behavior
15. Higher order asymptotic homogenization for dynamical problems
16. Transition from discrete to continuous media
17. Non-stationary heat transfer in composite membrane

The obtained research findings were subjected to peer review and published in reputable journals. The list of papers published in high impact journals includes:

1. I.V. Andrianov, J. Awrejcewicz, B. Markert, G.A. **Starushenko**, 'Analytical homogenization for dynamic analysis of composite membranes with circular inclusions in hexagonal lattice structures', International Journal of Structural Stability and Dynamics, 17(5), 2017, 1740015 (IF= 2.335).
2. I.V. Andrianov, J. Awrejcewicz, G.A. **Starushenko**, 'Asymptotic models and transport properties of the high contrast and densely packed fibre composites. Part I: Square lattice of circular inclusions', Composite Structures, 179(1), 2017, 617-627 (IF=3.853)
3. I.V. Andrianov, J. Awrejcewicz, G.A. **Starushenko**, 'Asymptotic models and transport properties of the high contrast and densely packed fibre composites. Part II: Square lattices



90-537, Lodz, Poland, 1/15 Stefanowskiego Street, **building A22**  
phone (+48 42) 631 22 25, email: w1k11@adm.p.lodz.pl, [www.abm.p.lodz.pl](http://www.abm.p.lodz.pl)  
Correspondence address: 116 Żeromskiego Street, 90-924 Łódź, Poland



HR EXCELLENCE IN RESEARCH




## Lodz University of Technology

Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics

- of rhombic/hexagonal and circular inclusions', *Composite Structures*, 180, 2017, 351-359 (IF=3.853)
4. I.I. Andrianov, J. Awrejcewicz, G.A. **Starushenko**, V.A. Gabrinets, 'Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibres. Part I: Using Schwarz Alternating Method', *Acta Mechanica*, 231, 2020, 4971-4990 (IF=2.102)
  5. I.I. Andrianov, J. Awrejcewicz, G.A. **Starushenko**, V.A. Gabrinets, 'Refinement of the Maxwell formula for composite reinforced by circular cross-section fibres. Part II: Using Padé approximants', *Acta Mechanica*, 231, 2020, 5145-5157 (IF=2.102).
  6. I.V. Andrianov, J. Awrejcewicz, G.A. **Starushenko**, 'Non-stationary heat transfer in composite membrane with circular inclusions in hexagonal lattice structures', *Acta Mechanica*, 2022, 233, 1339-1350 (IF=2.698).

POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
Wydział Mechaniczny  
Katedra Automatyki, Biomechaniki i Mechatroniki  
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-537 Łódź  
tel. 42 631-22-25, e-mail: w1k11@adm.p.lodz.pl  
REGON 000001583 NIP 727-002-18-95  
Adres do korespondencji  
ul. Żeromskiego 116, 90-924 Łódź

KIEROWNIK  
Katedry Automatyki, Biomechaniki i Mechatroniki  
Wydziału Mechanicznego  
Politechniki Łódzkiej  
  
prof. dr hab. inż. JAN AWREJCEWICZ



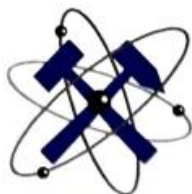
90-537, Lodz, Poland, 1/15 Stefanowskiego Street, building A22  
phone (+48 42) 631 22 25, email: w1k11@adm.p.lodz.pl, [www.abm.p.lodz.pl](http://www.abm.p.lodz.pl)  
Correspondence address: 116 Żeromskiego Street, 90-924 Łódź, Poland




HR EXCELLENCE IN RESEARCH

**ДОДАТОК Д**

**ДОВІДКА ПРО ПРАКТИЧНЕ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ  
ДИСЕРТАЦІЇ В НАУКОВО-ДОСЛІДНОМУ ІНСТИТУТІ ГІРНИЧИХ  
ПРОБЛЕМ АКАДЕМІЇ ІНЖЕНЕРНИХ НАУК УКРАЇНИ**



**АКАДЕМІЯ ІНЖЕНЕРНИХ НАУК УКРАЇНИ**  
**НАУКОВО-ДОСЛІДНИЙ ІНСТИТУТ ГІРНИЧИХ ПРОБЛЕМ**  
 Україна, 49050, м. Дніпро, просп. Гагаріна, 105/44  
 Телефон (0562) 47-14-72 Факс (056) 374-21-84  
 E-mail: v\_domna@yahoo.com

ЗАТВЕРДЖУЮ:  
 Директор Науково-дослідного  
 інституту гірничих проблем  
 АІН України  
  
 В.І. Бондаренко

**ДОВІДКА**

Науково-дослідним інститутом гірничих проблем було проведено низку тематик (АД-464, АД-465, АД-475, АД-476), які присвячені вирішенню актуальних питань енергоефективності України.

Дослідження проводились як лабораторними методами, так і з використанням методів асимптотичних моделей. Також були розроблені математичні моделі, які дозволяють коректно описувати композити різної структури та фізичні процеси, що відбуваються в них, обчислювати ефективні характеристики композитних матеріалів в області граничних значень їх фізичних і геометричних параметрів, будувати моделі континуальної апроксимації дискретних систем для обґрунтованого представлення особливостей розв'язку дискретних задач неперервними функціями.

У роботі даних наукових тематик приймала участь професор кафедри інформаційних технологій та інформаційних систем Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» Старушенко Г.А.

Напрямок її досліджень під час виконання роботи полягав у побудові асимптотичних моделей, які коректно працюють в області граничних значень фізичних і геометричних характеристик композиту та розгляді методів дослідження макроскопічних властивостей композитних матеріалів. Нею запропоновано ефективні аналітичні алгоритми дослідження композитів, армованих дискретними волокнами, побудовано математичні співвідношення, що описують приведені параметри композитів залежно від геометричної структури армувальних волокон та їх фізичних характеристик; побудовані асимптотичні моделі та розроблений для їх опису математичний апарат допускають узагальнення та можуть бути використаними при проведенні подальших фундаментальних досліджень у галузі будівельної механіки та механіки композитів.

Таким чином, побудовані в рамках теплопровідності асимптотичні моделі і розроблені методи їх математичного опису застосовні також для задач теорії пружності, електропровідності, електро- і магнітостатики, дифузії що значно розширює сферу їх теоретичних та практичних прикладень.

Науковий керівник,  
 д-р техн. наук, професор



І.А. Ковалевська