

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара  
Державний вищий навчальний заклад  
«Придніпровська державна академія будівництва та архітектури»

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ДЕМЕДЕЦЬКА Вероніка Віталіївна**


УДК 624.04

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**ДИНАМІКА В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО З**  
**ДЕМПФЕРАМИ В'ЯЗКОГО ТЕРТЯ ТА ДИНАМІЧНИМИ**  
**ГАСНИКАМИ КОЛИВАНЬ**

05.23.17 - будівельна механіка  
спеціальність

19 – архітектура і будівництво  
галузь знань

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів та текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело  В. В. Демедецька

Науковий керівник: Маневич Аркадій Ісаакович, доктор технічних наук, професор

Дніпро – 2019

## АНОТАЦІЯ

*Демедецька В.В.* **Динаміка в'язкопружної балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя та динамічними гасниками коливань.** – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (доктора філософії) за спеціальністю 05.23.17 «Будівельна механіка» (19 – архітектура та будівництво). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара; Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», Міністерство освіти і науки України, Дніпро, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню вимушених згинних коливань балок, оснащених демпферами і динамічними гасниками коливань (ДГК), з використанням некласичної моделі балки, запропонованої Тимошенко С. П. (БТ), і моделі в'язкопружного матеріалу Фохта.

Вивчення вимушених коливань балок з приєднаними до них динамічними гасниками коливань (ДГК) і демпферами в'язкого тертя має великий практичний інтерес у зв'язку з проблемою гасіння коливань різних будівельних конструкцій та споруд. Розрахунок багатьох таких конструкцій, наприклад мостів та башт, вимагає врахування зсувної податливості, а також внутрішнього і зовнішнього тертя (в оточенні резонансів), в зв'язку з чим особливий інтерес представляє використання моделі балки Тимошенко (БТ) і моделі Фохта для в'язкопружного матеріалу.

На відміну від класичної моделі, де напружено-деформований стан повністю визначається лише однією функцією переміщень  $y(x,t)$ , деформації в балці Тимошенко визначаються двовимірним вектором  $[y(x,t), \psi(x,t)]$ , де  $y(x,t)$  – поперечне зміщення,  $\psi(x,t)$  – кут повороту поперечного перерізу. Повний кут нахилу зігнутої вісі балки, для моделі балки Тимошенко, з урахуванням зсуву в поперечному перерізі, дорівнює сумі кута повороту поперечного перерізу й кута зсуву  $\mathcal{U}$ .

Використання моделі балки Тимошенко дозволяє врахувати зсувні деформації і інерцію обертання, а облік внутрішнього і зовнішнього тертя дозволяє дати реалістичний опис резонансної динаміки коливань у найбільш цікавому для вивчення діапазоні частот.

У даній роботі розглядаються два типи пристроїв для гасіння коливань: перший - демпфер в'язкого тертя, в якому гасіння коливань досягається тільки за рахунок сил тертя, при цьому нехтуючи малою масою; другий - динамічний гасник коливань, в якому ефект гасіння досягається насамперед за рахунок сил інерції гасника (найпростіший приклад – маса на пружинці), при цьому сили тертя можуть враховуватися або не враховуватися.

Складена математична модель вимушених коливань балки Тимошенко з в'язкопружного матеріалу з приєднаними точковими масами, демпферами і динамічними гасниками коливань при дії довільного навантаження  $q_0(x,t)$ , що може включати довільне розподілене навантаження  $q_0(x,t)$ , зосереджені сили  $P$  та моменти  $M$ . Розроблена модель використовує зручну систему безрозмірних змінних і параметрів.

Основні труднощі розв'язання задачі полягають в тому, що при коливаннях в'язкопружних балок та балок із зосередженими впливами змінні у рівняннях коливань не можна відокремити (в дійсній формі), на відміну від класичних задач для пружних балок. Це пояснюється тим, що диференційні рівняння динаміки балки з гасниками включають в себе непарні за часом часткові похідні (у тому числі змішані похідні), що з'являються завдяки врахуванню в'язкопружних властивостей матеріалу і зосереджених впливів від демпферів і гасників коливань. Загально відомо, що при наявності цих похідних класичні методи розв'язку, тобто методи, засновані на поділі змінних в дійсній області шуканих функцій, виявляються непридатними. У даній роботі зазначені труднощі долаються за допомогою переходу в комплексну площину, в якій поділ змінних стає можливим. У такому випадку самі форми коливань не зводяться до стоячих хвиль і включають компоненти рухомої хвилі (через різність фазових зсувів для різних складових мод - власних форм).

В даний час при аналізі таких задач зазвичай обмежуються найпростішими моделями з одним ступенем свободи, які не можуть дати адекватного опису динаміки балки.

Отримана система диференціальних рівнянь (ДР) вирішувалася з використанням методу комплексних амплітуд і розкладанням шуканого рішення за власними формами коливань пружної балки Тимошенко (тобто без внутрішнього тертя, гасників коливань та інших зосереджених впливів). В роботі показано, що метод розкладання динамічних переміщень по власним формам коливань пружної балки Тимошенко має певні переваги у порівнянні з методами будівельної механіки, що зазвичай застосовувалися при розв'язанні аналогічних задач в межах класичної теорії балок.

Отримано аналітичний розв'язок задачі про вимушені коливання в'язкопружної балки Тимошенко з зазначеними зосередженими впливами (демпферами, ДГК, точковими масами) при дії гармонійного навантаження з використанням розкладання за власними функціями пружної балки Тимошенко без цих впливів. Задачу зведено до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами щодо узагальнених координат - коефіцієнтів зазначеного розкладу.

Наведено розв'язок допоміжної задачі, де визначаються власні частоти і власні форми пружної балки Тимошенко, виконано аналіз для двох випадків закріплення балки: шарнірно закріпленої та консольної. Вивчено форми власних коливань пружної балки та наведено їх порівняння для моделей Тимошенко та Ейлера-Бернуллі.

Виконано аналіз власних частот в'язкопружної балки Тимошенко, які є комплексними і визначають як циклічну частоту коливань, так і загасання власних коливань. Показано, що кожна власна частота в'язкопружної балки Тимошенко (з лінійно-в'язким зовнішнім тертям) пов'язана з відповідною власною частотою пружної балки Тимошенко простою аналітичною залежністю, незалежно від граничних умов.

Виконано аналіз вимушених коливань пружної і в'язкопружної балки Тимошенко (без демпферів та динамічних гасників коливань). У дорезонансній зоні коефіцієнт зсувної податливості відносно слабо впливає на результат, за винятком коротких балок. У разі ж, коли частота зовнішньої сили значно перевищує першу власну, врахування більш високих форм і зсувної податливості є необхідним. Врахування зсувної податливості призводить до зміщення резонансу в сторону менших частот і помітного зростання амплітуд при резонансі. У зарезонансній зоні вплив коефіцієнта зсувної податливості істотно зростає, і класична модель Ейлера-Бернуллі і модель Релея не дають адекватного опису вимушених коливань.

В чисельному аналізі показано, що динамічний прогин представляє собою накладення рухомої і стоячої хвиль, через різність у зсуві фаз компонент прогину, але чисельні експерименти показують, що рухома складова стає помітною лише при великих коефіцієнтах в'язкого тертя.

Виконано аналіз сталих вимушених коливань в'язкопружної балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань при дії гармонійного навантаження. У чисельних експериментах розглядалися два випадки: шарнірно закріплена та консольна балки. На цих прикладах вивчено вплив різних параметрів - коефіцієнта зсувної податливості  $\chi$  і параметрів демпфера (коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  та місця його розташування) на форми і амплітуди коливань.

У одномодовому наближенні (придатному при частотах, що не перевищують помітно першу власну частоту) вплив демпфера може бути зведений до збільшення ефективного коефіцієнта в'язкого тертя балки. У загальному випадку змушених коливань, що вимагає обліку декількох власних форм у розкладі динамічного прогину, форми коливань також являють собою накладення стоячих і рухомих хвиль.

Наведено результати експериментального дослідження коливань балки з прикріпленим до неї демпфером в'язкого тертя. В якості рідин, що використовуються в демпфері в'язкого тертя, розглядалися гліцерин та вода, для

яких окремим експериментом визначався коефіцієнт в'язкого тертя. Отримані експериментальні дані дозволяють зробити висновок про ефективність застосування демпферів в'язкого тертя для гасіння коливань елементів мостів та інших балкових конструкцій, також показано, що результати виконаного автором експериментального дослідження знаходяться в досить хорошій відповідності до теоретичних передбачень.

У чисельному аналізі вивчено вплив динамічного гасника коливань на вимушені коливання шарнірно закріплених і консольних балок. Показано, що оптимальне значення коефіцієнта тертя в гасниках пов'язано з «розщепленням» власних частот при установці гасника. При певному значенні коефіцієнта в'язкого тертя в динамічних гасниках коливань відбувається злиття двох близьких локальних максимумів амплітуд коливань, в роботі показано, що саме це значення коефіцієнта тертя в гасниках і є оптимальним. Ця особливість відзначалась ще в роботах Д. Гартога [14].

У розглянутих в роботі чисельних прикладах отримано оцінки діапазонів раціональних безрозмірних параметрів гасника при дії зосереджених та розподілених зовнішніх сил.

Результати чисельного аналізу показують, що постановка демпферів і динамічних гасників коливань підсилює тенденцію до появи рухомих хвиль при вимушених коливаннях балок, особливо при дії локальних сил і зміщених щодо цих сил гасників. Рухома компонента істотно залежить від розташування демпфера або гасника і зростає зі збільшенням частоти збудження. Відзначається, що ця компонента динамічного прогину може призвести до істотних змін в кривизні зігнутої вісі балки і відповідно в згинних напруженнях, що має прийматися до уваги при аналізі динамічних напружень та при виборі параметрів налаштування динамічних гасників коливань.

*Ключові слова:* балка Тимошенко, в'язкопружний матеріал, динамічний гасник коливань, демпфер в'язкого тертя, вимушені і вільні коливання, резонанс, рухомі хвилі.

## ANNOTATION

*Demedetska V.V. Dynamics of a viscoelastic Timoshenko beam with dampers and dynamic vibration absorbers.* - Manuscript.

The thesis for the scientific degree of a candidate of technical sciences (doctor of philosophy) in speciality 05.23.17 “Structural Mechanics” (19 – architecture and engineering). – Oles Honchar Dnipro National University; State Higher Educational Establishment “Prydniprovs’ka State Academy of Civil Engineering and Architecture”, Dnipro, 2019.

The thesis is devoted to studying bending vibrations of beams equipped with dampers and dynamic vibration absorbers (DVA), using a non-classical beam model, proposed by S.P. Timoshenko (TB) and Focht model of viscoelastic material. Using the Timoshenko model allows to consider shear deformations and inertia of rotation, that is necessary for consideration for a wide class of bridge and tower structures. Considering internal and external friction allows one to give a realistic description of the beam dynamics near the resonance.

The study of forced oscillations of beams with their dynamic vibration dampers (DVA) and viscous friction dampers attached to them is of great practical interest in connection with the problem of damping oscillations of various structures and structures. The calculation of many such structures, such as bridges and towers, requires the consideration of shear compliance, as well as internal and external friction (surrounded by resonances), which is of interest for the use of the Timoshenko beam (TB) and the Focht model of viscoelastic material.

Unlike the classical model, where the stress-strain state is completely determined only by single displacement function  $y(x,t)$ , the deformations in the Tymoshenko beam are determined by the two-dimensional vector  $[y(x,t), \psi(x,t)]$ , where  $y(x,t)$  - transverse displacement,  $\psi(x,t)$  - is the angle of rotation of the cross-section. The full angle of the bent axis of the beam, for the model of Timoshenko beam, taking into account the displacement in the cross section, is equal to the sum of the angle of rotation of the cross section and the angle of displacement  $\gamma$ .

Using the model of the beam Timoshenko allows to take into account the shear deformations and inertia of rotation, and the account of internal and external friction allows to give a realistic description of the resonant dynamics of oscillations in the most interesting to study frequency range.

In this paper, two types of vibration damping device are considered: the first is the viscous friction damper, in which the damping of oscillations is achieved only by the friction forces, while neglecting the mass of the damper; the second is a dynamic vibration absorber, in which the damping effect is achieved primarily due to the inertia forces of the absorber (the simplest example is the mass on the spring), while the friction forces may be taken into account or not taken into account.

A mathematical model of forced oscillations of Timoshenko beam made from a viscoelastic material with attached point masses, dampers and dynamic vibration dampers, under arbitrary distributed load  $q_0(x,t)$ , concentrated forces  $P$  and moments  $M$ , is obtained using a convenient set of dimensionless variables and parameters.

The main difficulty in solving the problem is that in the case of oscillations of viscoelastic beams and beams with concentrated effects, the variables in the equations of oscillations cannot be separated (in real form), unlike the classical problems for elastic beams. This is explained by the fact that differential equations of the damping beam include odd-time partial derivatives (including mixed derivatives) that appear due to the viscoelastic properties of the material and the concentrated effects of dampers and dampers. It is common knowledge that, in the presence of these derivatives, the classical methods of decoupling, that is, methods based on the division of variables in the real form of the desired functions, are not suitable. In this paper, these difficulties are overcome by moving to a complex space in which the separation of variables becomes possible. In this case, the oscillation forms themselves are not reduced to standing waves and include components of the moving wave (due to the difference of phase shifts for different constituent modes).

Currently the analysis of such problems are usually limited to the simplest models with one degree of freedom, which can not give an adequate description of the beam dynamics.



The obtained system of differential equations (DE) was solved using the method of complex amplitudes and decomposition of the desired solution by its own forms of vibrations of the elastic Timoshenko beam (i.e. without internal friction, vibration dampers and other concentrated influences). The paper shows that the method of decomposition of dynamic displacements by their own forms of Timoshenko elastic beam oscillations has certain advantages in comparison with the methods of construction mechanics, which were usually used in solving similar problems within the classical beam theory.

An analytical solution of the problem of forced oscillations of a Timoshenko viscoelastic beam with the indicated concentrated effects (dampers, DVA, point masses) under the action of harmonic loading using the decomposition by its own functions of an elastic beam of Timoshenko was obtained without these influences. The problem is reduced to solving a system of linear algebraic equations with complex coefficients for generalized coordinates - coefficients of the specified decomposition.

The auxiliary problem is solved, which determines the natural frequencies and the natural forms of the elastic Timoshenko beam, analyzes the two cases of fixing the beam: the hinged and the cantilever beam. The forms of eigen oscillations of the elastic beam are studied and their comparisons are made for the Timoshenko and Euler-Bernoulli models.

The eigenfrequencies of the Timoshenko viscoelastic beam are analyzed, which are complex and determine both the cyclic oscillation frequency and the damping of the eigen oscillations. It is shown that each natural frequency of a Timoshenko viscoelastic beam (with linear-viscous external friction) is related to the corresponding natural frequency of the Timoshenko elastic beam by a simple analytical dependence, regardless of boundary conditions.

The analysis of the forced oscillations of the elastic and viscoelastic Timoshenko beam (without dampers and dynamic vibration absorbers) was performed. In the pre-resonance zone, the shear yield factor has relatively little effect on the result, except for short beams. In the case where the frequency of external force is much higher than the first eigen frequency, the consideration of higher forms and shear compliance is

necessary. Shear compression results in a shift of the resonance towards lower frequencies and a noticeable increase in the amplitudes at resonance. In the resonance zone, the influence of the shear rate is significantly increasing, and the classical Euler-Bernoulli model and the Rayleigh model do not adequately describe forced oscillations.

Numerical analysis shows that the dynamic deflection is the superposition of moving and standing waves due to the difference in phase shift of the deflection components, but numerical experiments show that the moving component becomes noticeable only at high coefficients of viscous friction.

The analysis of steady forced oscillations of the Timoshenko viscoelastic beam with viscous friction dampers and dynamic vibration absorbers under the action of harmonic loading is performed. In the numerical experiments, two cases were considered: hinged and cantilever beams. In these examples, the effect of different parameters - the shear rate  $\chi$  and the parameters of the damper (the coefficient of viscous friction in the damper  $\tilde{g}_f^*$  and its location) on the forms and amplitudes of oscillations were studied. In a single-mode approximation (suitable for frequencies not exceeding noticeably the first eigen frequency), the effect of the damper can be reduced to increase the effective coefficient of viscous friction of the beam. In the general case of forced oscillations, requiring the account of several eigen forms in the dynamic deflection schedule, the oscillation forms also represent the imposition of standing and moving waves.

The results of an experimental study of oscillations of a beam with a viscous friction damper attached to it are presented in this paper. The liquids used in the viscous friction damper were treated with glycerol and water, for which the coefficient of viscosity was determined in a separate experiment. The obtained experimental data prove the effectiveness of the use of viscous friction dampers for damping oscillations of elements of bridges and other beam structures.

In the numerical analysis, the effect of the dynamic absorber on the oscillations of the hinged and cantilever beams is studied. It is shown that the optimum value of the coefficient of friction in the DVA is related to the "splitting" of natural frequencies during the installation of the DVA. At a certain value of the coefficient of viscous friction in the dynamic absorbers, two close local maximums of the amplitudes of

oscillations are merged, in the work it is shown that this value of the coefficient of friction in the dampers is optimal. This feature was noted in the works of D. Hartog [14].

In the numerical examples considered in the paper, estimates of ranges of rational dimensionless parameters of the quencher under the influence of concentrated and distributed external forces are obtained.

The results of numerical analysis show that the formulation of dampers and dynamic absorbers exacerbates the tendency for the occurrence of moving waves in the forced oscillations of beams, especially under the action of local forces and offset relative to these forces dampers. The moving component depends substantially on the location of the damper or DVA and increases with the excitation frequency. It is noted that this component of dynamic deflection can lead to significant changes in the curvature of the bent axis of the beam and, accordingly, in the bending stresses, which should be taken into account in the analysis of dynamic stresses and when choosing the parameters for adjusting the dynamic dampers.

*Keywords:* Timoshenko beam, viscoelastic material, dynamic vibration absorber, viscous friction damper, forced and free oscillations, resonance, moving waves.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

### Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації

1. Демедецкая В. В., Маневич А. И., Пацюк А. Г. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 148 - 160.
2. Демедецкая В. В. Колебания консольной вязкоупругой балки с демпфером вязкого трения и сосредоточенными массами. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2011. Вип. 12. С. 83 - 93.
3. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения и сосредоточенными массами. *Theoretical Foundations*

*of Civil Engineering. Polish – Ukrainian Transactions.* Warsaw, 2011. Vol. 19. P. 161 - 168.

4. Demedetskaya V., Manevich A. Oscillations of viscoelastic Timoshenko beam with dynamic vibration absorber and concentrated masses. *Statics, Dynamics, Stability of Structures.* Lodz, 2013. Vol.3. Chapter 5. P. 147 - 177.

5. Демедецкая, В. В. Свободные колебания вязкоупругой балки Тимошенко с динамическим гасителем колебаний и сосредоточенными массами. *Вісник Дніпропетровського національного університету. Сер. Механіка.* Дніпропетровськ, 2014. Вип.18(2). №7. С. 66-80.

6. Demedetskaya V., Manevich A. Forced oscillations of a viscoelastic Timoshenko beam with dampers and dynamic vibration absorbers. *Statics, Dynamics, Stability of Structures : a series of monographs.* Lodz, 2016. Vol.5. Chapter 10. P. 233 - 263.

### **Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації**

7. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Динамика вязкоупругой балки Тимошенко с динамическим гасителем колебаний. *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела:* материалы VII Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика НАН Украины А. С. Космодемьянского (Донецк, 11-14 июня 2013 г.). Донецк, 2013. С. 34 - 38.

8. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вынужденные колебания вязкоупругой балки Тимошенко с гасителем колебаний. Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (Одеса, 16-19 трав. 2017 р.). Одеса, 2017. С. 92 - 96.

9. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вязкоупругая балка Тимошенко с демпферами вязкого трения и динамическими гасителями колебаний. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій:* матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції, присвяченій пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (до сторіччя від дня народження) (Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро, 2019. С. 170 - 171.

**Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації**

10. Демедецкая В. В. Влияние кориолисовых сил инерции на динамику вращающихся балок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 9. С. 72 - 79.

11. Демедецька В. В., Маневич А. І., Пономарьова Л. Ф. Zur Frage der wirtschaftlichen Effektivität bei der Anwendung von Flüssigkeitsschwingungsdämpfer. *Актуальні питання сучасної економічної науки та міжнародних відносин: матеріали регіональної науково-практичної конференції молодих учених та студентів (Дніпро, 25-26 лист. 2011 р.)*. Дніпропетровськ, 2011. С. 112 - 113.

## ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ .....	2
Перелік умовних позначень.....	17
ВСТУП.....	18
<b>РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ДЕМПФЕРАМИ І ДИНАМІЧНИМИ ГАСНИКАМИ КОЛИВАНЬ ...</b>	<b>24</b>
1.1. Демпфери та динамічні гасники коливань.....	24
1.2. Роботи по загальній теорії коливань систем з демпферами і гасниками коливань .....	29
1.3. Гасіння коливань балок .....	37
1.4. Використання некласичних моделей балки .....	42
1.5. Висновки по розділу 1 .....	44
1.6. Список використаних джерел в розділі 1 .....	45
<b>РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗОК .....</b>	<b>46</b>
2.1. Диференційні рівняння динаміки в'язкопружної балки Тимошенко при дії розподіленого навантаження .....	46
2.2. Безрозмірні рівняння. Граничні умови .....	48
2.3. Власні форми коливань пружної БТ і умови їх ортогональності. ....	49
2.4. Розв'язання задачі про коливання в'язкопружної балки Тимошенко (без демпферів і ДГК) при дії гармонійного навантаження .....	52
2.4.2. Дія зосередженої гармонійної сили.....	55
2.4.3. Одномодове наближення.....	56
2.4.4. Якісне порівняння пружної і в'язкопружної балок.....	57

2.5. Рішення задачі для в'язкопружної балки Тимошенко з демпфером, точковими масами і динамічним гасником коливань. ....	58
2.5.1. В'язкопружна балка Тимошенко з демпфером в'язкого тертя.....	58
2.5.2. В'язкопружна балка Тимошенко з динамічним гасником коливань .....	60
2.5.3. В'язкопружна балка Тимошенко з точковими масами, демпфером та динамічним гасником коливань.....	63
2.6. Висновки по розділу 2 .....	64
2.7. Список використаних джерел в розділі 2 .....	65
<b>РОЗДІЛ 3. КОЛИВАННЯ ПРУЖНОЇ ТА В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО БЕЗ ДЕМПФЕРІВ ТА ДИНАМІЧНИХ ГАСНИКІВ КОЛИВАНЬ</b>	<b>66</b>
3.1. Вільні коливання пружної БТ. Власні частоти та власні форми.....	66
3.1.1. Основні рівняння.....	66
3.1.2 Пружна шарнірно закріплена балка .....	67
3.1.3 Пружна консольна балка .....	70
3.2. Вільні коливання в'язкопружної балки Тимошенко .....	75
3.3. Вимушені коливання балки Тимошенко без урахування внутрішнього і зовнішнього тертя .....	77
3.4. Вимушені коливання балки Тимошенко з урахуванням внутрішнього і зовнішнього тертя. ....	81
3.5. Висновки по розділу 3 .....	86
3.6. Список використаних джерел в розділі 3 .....	88
<b>РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО З ДЕМПФЕРАМИ В'ЯЗКОГО ТЕРТЯ</b> .....	<b>89</b>
4.1. Шарнірно закріплена балка.....	90
4.2. Консольна балка.....	96

4.3. Експериментальне дослідження коливань в'язкопружної балки з демпфером в'язкого тертя.....	100
4.3.1. Загальні відомості про експеримент .....	101
4.3.2. Визначення коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері.....	102
4.3.3. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя в балці.....	102
4.3.4. Вимушені коливання балки з демпфером. ....	104
4.4. Висновки по розділу 4 .....	105
4.5. Список використаних джерел у розділі 4 .....	106
<b>РОЗДІЛ 5. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО З ДИНАМІЧНИМИ ГАСНИКАМИ КОЛИВАНЬ .....</b>	<b>107</b>
5.1. Шарнірно закріплена балка.....	107
5.1.1. Вплив динамічного гасника коливань на власні частоти в'язкопружної балки Тимошенко .....	108
5.1.3. Врахування декількох мод. Форми коливань. Рухомі хвилі.....	117
5.2. Консольна балка .....	120
5.2.1. Амплітудно-частотні характеристики для вимушених коливань (одномодове наближення) .....	121
5.2.2. Вплив розташування гасника.....	125
5.3. Висновки по розділу 5 .....	127
5.4. Список використаних джерел у розділі 5 .....	129
<b>ВИСНОВКИ .....</b>	<b>130</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....</b>	<b>133</b>
<b>ДОДАТОК. СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА .....</b>	<b>144</b>



### **Перелік умовних позначень**

ДГК – динамічний гасник коливань;

БТ – балка Тімошенко;

АЧХ – амплітудно-частотні характеристики;

Балка ЕБ – балка Ейлера-Бернуллі;

ГУ – граничні умови;

СЛАУ – система лінійних алгебраїчних рівнянь.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Дослідження коливань балок з приєднаними до них динамічними гасниками коливань (ДГК) та демпферами в'язкого тертя становить інтерес у зв'язку з проблемою гасіння коливань конструкцій, зокрема, башт та мостів.

Практика машинобудування та цивільного будівництва протягом останніх десятиліть показала, що ДГК і демпфери в'язкого тертя є одними з ефективніших засобів зменшення небажаних коливань конструкцій та споруд.

Одним з останніх успішних прикладів застосування динамічних гасників коливань можна назвати демпфування коливань пішохідного моста Millennium Bridge в Лондоні (2001). В цілому 37 демпферів і гасителів, спеціально розроблених компанією Taylor Devices Inc., були встановлені для зменшення амплітуд крутильних і горизонтальних коливань. Використання гасників зменшило динамічний відгук у 40 разів.

Відзначимо також використання динамічних гасників коливань для гасіння резонансних коливань моста через Волгу в м. Волгограді (2010) та вежі Yokohama Landmark Tower в Японії, що є найвищою будівлею в Японії.

В даний час при аналізі подібних задач для балочних конструкцій зазвичай обмежуються найпростішими моделями з одним ступенем свободи, які не можуть дати адекватного опису динаміки балки.

Розрахунок багатьох конструкцій вимагає врахування зсувної податливості, а також внутрішнього і зовнішнього тертя (біля резонансів), в зв'язку з чим представляє інтерес використання моделі балки Тимошенко (БТ) і моделі Фохта для в'язкопружного матеріалу.

Важливою і актуальною задачею є визначення оптимальних значень параметрів демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників коливань - коефіцієнту в'язкого тертя в гаснику, коефіцієнту непружного опору у зв'язках, відносної маси та налаштування (частоти) гасника. Відомі роботи Дж. Ден Гартога, G. V. Warburton, J. Q. Sun, M. R. Jolly, M. A. Norris, Б.Г. Коренева, Л.М. Резнікова та інших внесли важливий внесок у розробку цієї проблеми, але застосування все

більш складних розрахункових моделей потребує подальшого розвитку цих досліджень.

У роботі розроблено математичну модель і отримано ефективний аналітичний розв'язок задачі про коливання балки з демпферами і динамічними гасниками коливань (ДГК) як систем з розподіленими і зосередженими параметрами, в рамках уточненої моделі балок - «балки Тимошенко» (БТ), яка враховує зсувну податливість, інерцію повороту та внутрішнє тертя. Врахування вищезгаданих обставин обумовлює актуальність вибраної теми дисертації.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами.** Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень кафедри обчислювальної механіки та міцності конструкцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Робота виконувалася у рамках одного із розділів держбюджетної теми «Моделі, методи та алгоритми дослідження неоднорідних елементів конструкцій при статичному та динамічному навантаженні», номер державної реєстрації 016U003316, 2010-2014 рр.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є розробка ефективного аналітичного розв'язку задачі про коливання балкових конструкцій з приєднаними до них демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань з врахуванням зсувної податливості та внутрішнього в'язкого тертя, а також аналіз отриманого розв'язку з метою вивчення закономірностей динаміки в'язкопружних балок з гасниками коливань і визначення їх оптимальних параметрів. Ця проблема передбачає розв'язання наступних задач:

- аналіз використовуваних в даний час математичних моделей і методів розв'язання задач динаміки балкових конструкцій з зосередженими впливами;
- розробка ефективної математичної моделі задачі динаміки в'язко-пружної балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань (ДГК);
- отримання загального розв'язку задачі про коливання в'язко-пружної балки

Тимошенко з зосередженими впливами з урахуванням неможливості відокремлення змінних в дійсній області;

– аналіз власних частот і вільних коливань в'язко-пружної балки Тимошенко (БТ);

– аналіз впливу демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників на характеристики вільних і вимушених коливань в'язко-пружної БТ;

– розробка рекомендацій щодо вибору оптимальних параметрів гасників коливань (параметри налаштування та демпфування).

**Об'єкт дослідження** – процес коливання балок з приєднаними до них демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань (ДГК) з урахуванням в'язко-пружних властивостей балок та їх зсувної податливості (у моделі Тимошенко).

**Предмет дослідження** – математична модель динаміки балки із демпферами та ДГК з урахуванням зсувної податливості і внутрішнього в'язкого тертя, та аналітичний розв'язок цієї моделі; вплив демпферів та ДГК на характеристики коливань балок; визначення оптимальних параметрів і оцінка ефективності демпферів і ДГК.

**Методи дослідження.** Диференційні рівняння динаміки балки з гасниками включають в себе непарні за часом часткові похідні (в тому числі змішані), що з'являються завдяки врахуванню в'язко-пружних властивостей матеріалу і зосереджених впливів від демпферів і гасників коливань. Як відомо, при наявності цих похідних класичні методи, засновані на відокремленні змінних в дійсній області шуканих функцій, непридатні. У даній роботі зазначені труднощі долаються за допомогою переходу в комплексну область, в якій відокремлення змінних стає можливим.

Отримана система диференційних рівнянь (ДР) вирішувалася з використанням методу комплексних амплітуд і розкладанням шуканого рішення за власними

формами коливань пружної балки Тимошенко (без внутрішнього тертя і гасників коливань).

Результати численних експериментів, що приводяться в роботі, отримані за допомогою програми Python та бібліотеки SageMath.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- удосконалено математичну модель коливань балки Тимошенко з в'язко-пружного матеріалу з приєднаними зосередженими масами, демпферами і динамічними гасниками коливань при дії довільного розподіленого та зосередженого навантаження, що використовує зручну систему безрозмірних змінних і параметрів. Використання моделі Тимошенко дозволяє врахувати зсувні деформації і інерцію обертання, що необхідно при розрахунку широкого класу мостових та баштових конструкцій, а врахування внутрішнього і зовнішнього тертя дозволяє описати резонансну динаміку балки;

- отримав подальший розвиток аналітичного розв'язок задачі про вільні та вимушені коливання в'язко-пружної балки Тимошенко з ДГК і демпферами в'язкого тертя при довільному навантаженні. Показано, що метод розкладання динамічних переміщень по власним формам коливань пружної балки Тимошенко має певні переваги у порівнянні з методами будівельної механіки, що зазвичай застосовувались при розв'язанні аналогічних задач у межах класичної теорії балок;

- отримав подальший розвиток аналіз впливу параметрів балки (зсувної жорсткості, внутрішнього і зовнішнього тертя), демпферів в'язкого тертя та ДГК на характеристики вимушених коливань.

- вперше виявлено принципову роль рухомих складових у динамічному відгуку в'язко-пружних балок із зосередженими силами та гасниками коливань.

- вперше проведено порівняльний аналіз динаміки балки при наявності демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників коливань;

- отримав подальший розвиток аналіз залежності оптимальних параметрів ДГК (параметри налаштування і демпфування) від зсувної жорсткості та внутрішнього тертя балки;

– виконано експериментальне дослідження впливу демпфера в'язкого тертя на амплітуди коливань балки, що підтвердило основні аналітичні результати.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи можуть бути застосовані у розрахунковій практиці науково-дослідницьких та проектно-конструкторських установ для розрахунку динаміки та проектування балочних конструкцій (башти, мости та інші), для визначення параметрів гасників коливань та демпферів в'язкого тертя з урахуванням зсувної податливості та внутрішнього тертя у балці.

**Особистий внесок здобувача.** Дисертаційна робота виконана здобувачем самостійно. Значна частина наукових результатів також отримана здобувачем самостійно. Автору належить розв'язання задач, проведення чисельного експерименту та обробка результатів, а також проведення експерименту. Постановка задачі та ідея її розв'язання належать науковому керівнику, професору, д.т.н. А. І. Маневичу. Обговорення результатів проведено спільно з науковим керівником. У роботах, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у наступному:

- аналітичний розв'язок задачі о вимушених коливаннях в'язкопружної балки Тимошенко з динамічними гасниками, демпферами в'язкого тертя та зосередженими масами [3,4,6,7,8,9];

- проведення чисельного експерименту та аналіз впливу параметрів внутрішнього тертя та параметру зсувної податливості на амплітуди коливань балки Тимошенко [3,6,8,9];

- проведення чисельного аналізу та пошук оптимальних параметрів налаштування параметрів динамічного гасника коливань та демпфера в'язкого тертя [5,6,8,9];

- проведення експерименту з оцінки ефективності демпферів в'язкого тертя з різними рідинами [1].

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення роботи викладено та обговорено на міжнародних наукових семінарах та конференціях: на українсько-німецькому семінарі “Advanced Problems in Mechanics of Heterogeneous Media and Thin-Walled Structures”, (Dnipropetrovsk, 2010), на XIX українсько-польському семінарі «Theoretical Foundations of Civil Engineering» (Warsaw, 2011), VII Международной научной конференции, посвященной 90-летию академика НАН Украины А. С. Космодемьянского (Донецк, 2013), IV Міжнародній науково-практичній конференції (Одеса, 2017), 2-й Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпро, 2019).

Результати і дослідження цієї праці були неодноразово викладені на щорічних звітних конференціях ДНУ (2010 – 2013). У повному обсязі результати роботи були представлені на міжвузівському науковому семінарі «Проблеми нелінійної механіки» під керівництвом проф. А. І. Маневича (Дніпро, 2019), на науковому семінарі кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки ДНУ (Дніпро, 2019) та міжвузівському науковому семінарі «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» ЗНУ (Запоріжжя, 2020).

**Публікації.** За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових робіт, у тому числі 4 тези доповідей та 7 статей у наукових фахових виданнях, з яких 3 статті в іноземному виданні.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота викладена на 144 сторінках машинописного тексту, складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Обсяг основного тексту дисертації складає 114 сторінок друкованого тексту. Робота ілюстрована 10 таблицями та 43 рисунками, список використаних джерел містить 110 найменувань.

## РОЗДІЛ 1.

# АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ДЕМПФЕРАМИ І ДИНАМІЧНИМИ ГАСНИКАМИ КОЛИВАНЬ

### 1.1. Демпфери та динамічні гасники коливань

До теперішнього часу відомі різні методи і засоби боротьби з неприпустимими коливаннями конструкцій, такі, як балансування і врівноваження джерел динамічних навантажень, зміна жорсткісних і інерційних параметрів конструкцій з метою зміни зон резонансу, підвищення демпфуючих властивостей матеріалу, застосування віброізоляції і різноманітних гасників коливань, зокрема демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників коливань.

Пристрої для гасіння коливань можуть бути засновані або тільки на використанні дисипативних сил, або тільки сил інерції без урахування демпфування, або ж в загальному випадку - з використанням і сил інерції і сил тертя.

У першому випадку гасіння коливань досягається завдяки дисипації енергії, яка розсіюється в навколишнє середовище при коливаннях системи. Розсіювання відбувається також в матеріалі і в з'єднувальних елементах конструкції. Дисипативні сили залежать від швидкості руху мас коливальної системи або від швидкості деформації пружного елемента.

У другому випадку використовуються сили інерції додаткових мас, приєднаних до системи або безпосередньо до джерела коливань. В якості додаткової маси може виступати тверде тіло або система, що передбачає наповнювач у вигляді сипких матеріалів, в'язких рідин і ін. Пружною складовою подібних систем можуть бути сталеві пружини, гумові елементи і інші матеріали (гума, полімери).

У літературі для подібних пристроїв використовуються різні терміни: інерційний демпфер, інерційний гасник, Tuned Mass Damper, динамічний гасник коливань (ДГК), Dynamic Vibration Absorber (DVA), гідродинамічний гасник коливань і ін.



У даній роботі застосовуються тільки два терміни: (1) демпфер в'язкого тертя, коли гасіння коливань досягається тільки за рахунок сил тертя, при нехтуванні малою масою і (2) динамічний гасник коливань, коли гасіння досягається насамперед за рахунок сил інерції гасника, при цьому сили тертя можуть враховуватися або не враховуватися.

Першу згадку ДГК зазвичай пов'язують з ім'ям Фрама, який в 1909 р вперше запатентував конструкцію ДГК, що використовується в суднобудуванні.

Елементарні відомості про розрахунки і застосування ДГК (для найпростіших систем з одним ступенем свободи) наведені у відомих підручниках С. П. Тимошенко [52], Дж. П. Ден-Гартога [14], Я.Г. Пановко [41].

У перших дослідженнях, що датуються ще початком ХХ століття, розглядався ДГК без демпфування, що налаштовується на частоту вимушених коливань. Такий гасник є вузькосмуговим, так як не усуває небезпечних коливань конструкції при зміні частоти збурення. Введення демпфування дозволяє істотно розширити смугу частот ефективної роботи ДГК.

З тих пір ДГК набув широкого поширення, йому присвячено безліч досліджень і робіт. В даний час ДГК активно використовуються для зменшення небажаних коливань в машинобудуванні і цивільному будівництві.

Одним з останніх успішних прикладів застосування динамічних гасників коливань можна назвати демпфування коливань пішохідного моста Millennium Bridge в Лондоні (2001) (D. E Newland [85] – [86], C. Meinhardt, D. Newland, J. Talbot, D. Taylor [83])

Міст був відкритий 10-го червня 2000 року. У день відкриття через міст пройшло більше 100 000 чоловік (близько 2000 чоловік одночасно перебували на мосту). Однак, в момент, коли люди почали рухатися по мосту, несподівано виникли виражені коливання в горизонтальній площині. Заміри, зроблені в цей день показали, що амплітуда центрального прольоту досягала 75 мм, а деяких підтримуючих тросів мосту - 300мм при частоті 0.9 Гц. Рух по мосту вирішено було обмежити до вирішення проблеми. Стало очевидно, що проблема пов'язана з поперечними коливаннями, і, хоча в розрахунку було враховано можливе

поперечне збурення, все ж не очікувалося, що пішоходи досить швидко почнуть йти в такт коливанням моста.

З метою запобігання небажаних коливань було розглянуто два можливих варіанти вирішення проблеми. Перший - збільшення жорсткості конструкції, що кардинально б змінило зовнішній вигляд будівлі, так як, відповідно до розрахунків, необхідно було збільшити жорсткість практично в 10 разів. Другий варіант передбачав установку гасників. В даному випадку було вирішено використовувати демпфери в'язкого тертя і динамічні гасники коливань, так як вони мають порівняно невелику вагу і розмірами, є стійкими до втомлювання та прості в обслуговуванні, а також витрати на їх установку є невеликими. Одним з основних критеріїв вибору типу демпферів і гасників була можливість їх використання для широкого спектра частот, зокрема потребувалось керування частотами від 0 до 5 Гц і малими амплітудами (до 25 мм). В цілому 37 демпферів і гасителів (Рис. 1.1), спеціально розроблених компанією Taylor Devices Inc., були встановлені для зменшення амплітуд крутильних і горизонтальних коливань.

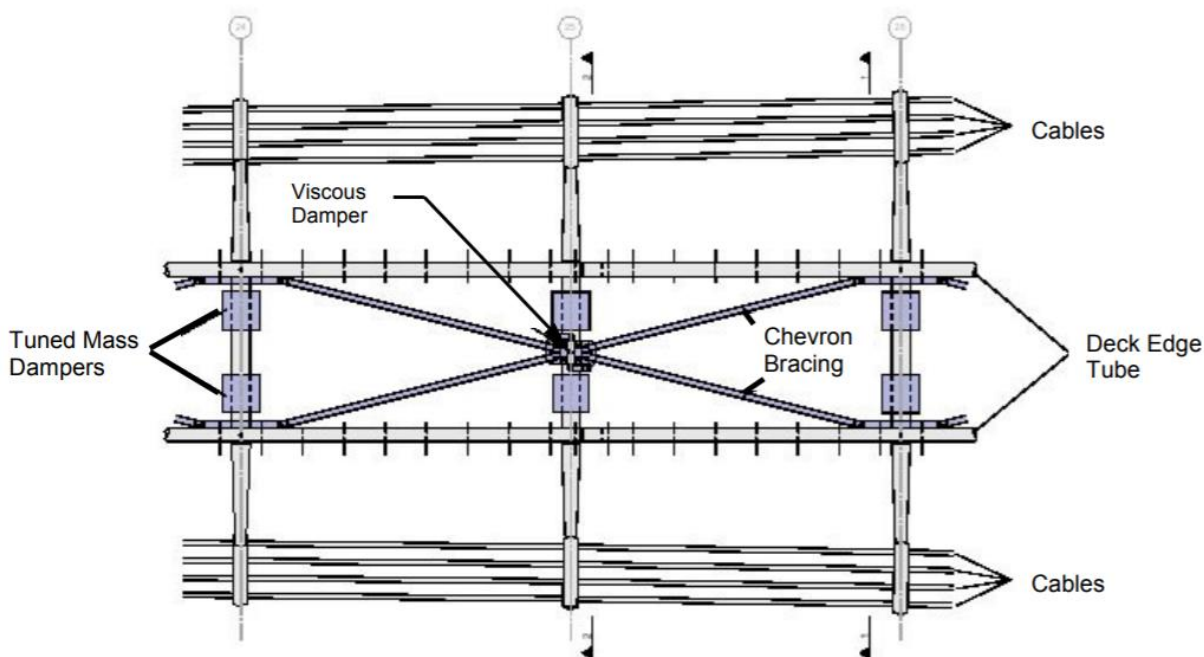


Рисунок 1.1 – Демпфери в'язкого тертя і динамічні гасники коливань, виготовлені для Millennium Bridge, London

Гасники і демпфери розміщувалися в основному під палубою моста (Рис. 1.2) і поверх поперечних коробчатих секцій для зменшення поперечного горизонтального руху моста, а також вертикального переміщення.

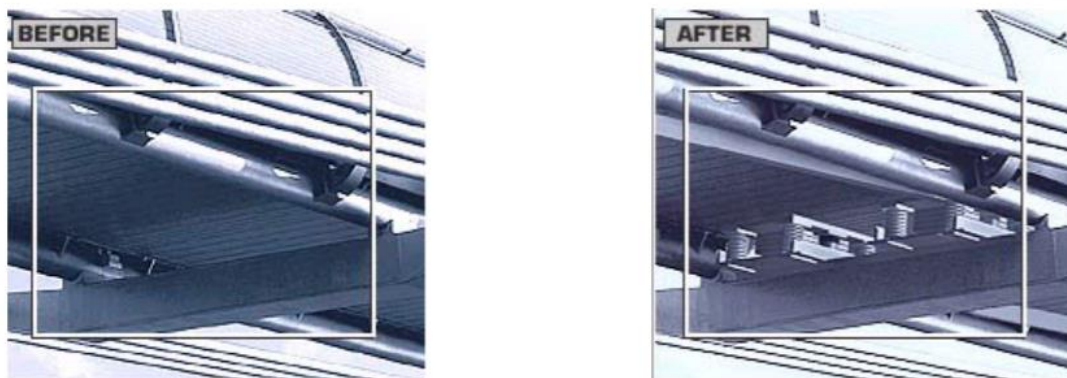


Рисунок 1.2 – Установка динамічних гасителів коливань, виготовлених для Millennium Bridge, London.

І хоча для Millennium bridge не спостерігалось надмірні вертикальні переміщення, динамічні гасники коливань були додані в якості запобіжного заходу, оскільки дослідження показали, що синхронне вертикальне навантаження, що викликається пішоходами, також можливе і небезпечне для подібного роду конструкцій. При цьому вертикальне збурення, яке викликається пішоходами, відмінне від «класичного випадку» крокування в ногу групи солдатів, так як у випадку з пішоходами навантаження обумовлене підсвідомою реакцією пішохода на рух моста. Використання гасників зменшило динамічний відгук у 40 разів. Millennium Bridge офіційно знову відкрили для публіки 22 лютого 2002 року, зараз щорічно їм користується близько 4 млн людей.

Інший недавній приклад небезпечної поведінки моста мав місце в 2010 році в м. Волгограді (Овчинников І.Г. [38] - [39]). 20 травня 2010 року в результаті вітрового навантаження міст через річку Волга увійшов в резонанс, амплітуди коливань у вертикальній площині досягали 40-50 см. Цікавим є той факт, що такі амплітуди коливань спостерігалися протягом більш ніж двох годин, проте потім

почали затухати, а подальше обстеження моста не показало видимих дефектів і пошкоджень мостової конструкції або дорожнього полотна. На підставі рекомендацій фахівців було прийнято рішення з технічного зміцнення волгоградського моста за допомогою встановлення на трьох його надводних прольотах динамічних гасників коливань, вагою по 5,2 тонни кожен.

У більшості робіт, присвячених дослідженням непроектної поведінки Волгоградського моста, стверджувалося, що подібна поведінка балкових нерозрізних мостів, до яких і відноситься міст у Волгограді, фіксується вперше. Однак, у працях Наумової Г. А., Саманова В. В., Пономаренко С. А [37], Овчинникова І. І., Овчинникова І. Г., Філіппової В. О [39] відзначається, що подібні явища в багатопрогонових нерозрізних балкових мостових конструкціях мали місце і раніше. Так, аеродинамічна нестійкість раніше виявлялася у віадукі Tozaki (Японія), у моста через Токійську затоку (Trans Tokyo Bay Highway bridge), у мостового переходу до аеропорту Kansai, (Японія), у мостів - підходів до мосту Oshima (Японія), у мостів - підходів до Східного мосту Великий Бельт (Данія). В [37] - [39] розглядаються також коливання моста Ріо-Нітерой через затоку Гуанабара в Ріо де Жанейро (Бразилія) внаслідок вітрового навантаження. Сильні вертикальні коливання цього моста зафіксували 17 серпня 1980 року під час бурі, при якій пориви вітру мали стійку швидкість від 55 до 60 км / год (14 - 16 м / с). Були зафіксовані коливання амплітудою від 250 мм до 600 мм. Подібні ситуації для цього моста неодноразово повторювалися протягом наступних років, що спонукало вжити заходів щодо запобігання подібним випадкам. За результатами досліджень для управління коливаннями прогонової будови моста використовувалася система з декількох синхронізованих динамічних гасників.

Відзначимо також використання динамічних гасників коливань для вежі Yokohama Landmark Tower в Японії. Два таких гасника, кожен з яких має масу 170 тонн, були розроблені і встановлені на вежі, що є найвищою будівлею в Японії.

## **1.2. Роботи по загальній теорії коливань систем з демпферами і гасниками коливань**

Демпфер і динамічним гасникам коливань присвячений ряд монографій, довідників і багато статей. Один з перших аналізів застосування ДГК був представлений в роботі Ormondroyd J. і Den Hartog [87], які розглянули гасіння коливань системи з одним ступенем свободи за допомогою маси на пружині. Пізніше Brock J.E. [60] доповнив цей аналіз, врахувавши в'язке тертя в гаснику.

У монографії [14] Ден Гартог продовжив аналіз ефективності динамічних гасників на прикладі пристроїв, що пригнічують бічну качку корабля, тобто коливань навколо його поздовжньої осі. Відзначається, що подібні пристрої також можна використовувати для пом'якшення поштовхів автомобіля та в інших пристроях. Автором отримано вираз для амплітуди коливань основної маси системи на прикладі консервативної системи з одним ступенем свободи, до якої приєднано динамічний гаситель коливань. Показано, що переміщення залежить від таких основних величин: маси гасника, маси основної системи, коефіцієнта тертя в динамічному гаснику, власних частот гасника і системи, а також від частоти зовнішньої збуджуючої сили. У практиці часто складно або навіть неможливо варіювати масу основної системи, її частоту або частоту зовнішньої сили, тому основними змінними параметрами є маса гасника, його власна частота і значення коефіцієнта тертя. Автор розглядає задачу оптимального значення параметра тертя гасника. У разі, коли значення коефіцієнта тертя дорівнює нулю, амплітуда коливань основної системи при резонансі нескінченна. Аналогічний результат виходить і в разі, коли значення коефіцієнта стає рівним нескінченності, так як в цьому випадку маса гасника і основна маса системи фактично виявляються жорстко пов'язаними між собою, а система перетворюється в систему з одним ступенем свободи. Пошук проміжного значення, що забезпечує мінімальне значення резонансної амплітуди, є основною метою. Розглядаючи задачу пошуку оптимального значення параметра тертя, автор зауважив, що криві, що описують амплітуди коливань при різних значеннях параметра тертя, мають дві загальні стаціонарні нерухомі точки. Врахувавши цей факт, а також зазначивши, що зміни

частот гасника і головної системи впливають на ординати даних точок, автор приходиться до висновку, що оптимальним є значення коефіцієнта тертя, при якому дані стаціонарні точки мають однакові (або майже однакові ординати), а крива амплітуд має горизонтальну дотичну в одній з цих точок. При цьому автор показав, що не має значення, в якій саме точці крива буде мати горизонтальну дотичну. Запропонований в роботі «метод нерухомих точок на АЧХ» в наступних роботах широко застосовувався і розвивався протягом десятиліть, аж до теперішнього часу (він викладений в книзі Тимошенко [52]).

Застосування динамічних гасників коливань для гасіння вібрації корпусу судна і його окремих конструкцій і механізмів розглядалося Алексєєвим А. М., Сборовським А. К. в навчальному посібнику [2]. Особлива увага в роботі приділяється нелінійним гасникам коливань та експериментам по визначенню основних параметрів динамічних гасників коливань.

У довіднику [42] Пановко Я. Г. зазначає, що гасники можуть бути корисні при коливаннях будь-яких видів: поздовжніх, крутильних, поперечних. Наводиться теорія обліку динамічного гасника коливань з в'язким, сухим тертям і без нього. Підкреслюється, що для повного гасіння коливань основної системи при моногармонічному збуренні необхідно, щоб власна частота динамічного гасника в точності дорівнювала частоті збурення. У разі, коли ця умова не виконується, то динамічний гасник може виявитися шкідливим, оскільки введення в основну систему гасника призводить до появи другого резонансу, який може стати небезпечним. При можливій непостійності частоти збудження необхідно вводити демпфування в систему гасника та розглядати його ефект у всьому діапазоні зміни частоти.

Розрахунок ефективності і визначення оптимальних параметрів динамічного гасника коливань розглядаються і в довіднику [46]. Відзначається, що до параметрів, за якими проводиться оптимізація, відносять зазвичай коефіцієнти, що характеризують дисипативні властивості гасника (коефіцієнт в'язкого тертя в гаснику, коефіцієнт непружного опору в зв'язках), а також відносну масу самого

гасника. Показано, що вибір оптимальних параметрів сильно залежить від частоти і виду зовнішньої сили.

У довіднику «Вібрації в техніці» [49] також досліджується питання оптимізації параметрів демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників коливань. Розглядається використання динамічних гасників коливань маятникового, коткового, ударного типів. В якості критерію ефективності гасника автори розглядають відношення амплітуди системи без гасника і з його урахуванням. Окремі глави присвячені обліку внутрішнього тертя при коливаннях пружних тіл. Як і в роботах, згаданих раніше, приклади обмежуються розглядом систем з одним ступенем свободи.

У довіднику [50] під редакцією Коренєва Б.Г., Рабиновича І.М. наводяться теоретичні та експериментальні дані про ефективність виброгашення деяких високих (щогли, вежі) і протяжних (трубопроводи і т.д.) конструкцій при дії вітрового резонансу. Відзначається, що застосування ДГК для подібних конструкцій є особливо ефективним. Проблеми коливання веж розглядаються на модельних задачах про коливання стрижнів при дії розподіленого гармонійної навантаження з нестабільною частотою. Як чисельного прикладу наводиться розрахунок радиобашни висотою 100м., загальною масою 50 т. При дії рівномірно розподіленого навантаження 30 Н / м з нестабільною частотою. ДГК з в'язким тертям був встановлений у верхньому перетині башти, непружний опір враховувався по Е.С. Сорокіну. Результати показують, що амплітуди вдалося зменшити в 5-6 разів, а значення оптимальних параметрів добре відповідають параметрам, отриманим для системи з одним ступенем свободи з гасником. Однак, автори відзначають, що результати отримані все-таки для спрощеної моделі. У довіднику наводяться також приклади ефективного використання ДГК для гасіння сейсмічної реакції висотних будівель, коливань щогл, а також коливань проводів, канатів і водопроводів.

Серед робіт, присвячених гасникам коливань, слід зазначити докторську дисертацію Резнікова Л. М. [45], присвячену теорії динамічних гасників коливань та її використанню у задачах віброзахисту конструкцій і споруд. У дисертації

розглянуті питання врахування, в комплексній формі, частотно-незалежного тертя і побудови еквівалентних в'язкопружних моделей механічних систем, отримані аналітичні та числові результати для оптимальних параметрів і ефективності гасників з в'язким і частотно-незалежним тертям.

У монографії Коренєва Б.Г., Резнікова Л.М. [26] наведені основні результати теорії динамічного гасника коливань, застосованого до різних систем. Детально розглянуто питання оптимізації параметрів динамічних гасників коливань для систем з одним ступенем свободи при різних видах впливу - гармонійному (в вузькополосному або широкосмуговим діапазонах), періодичному, випадковому (стаціонарному і нестаціонарному), при різних критеріях якості (амплітуда абсолютного і відносного переміщень, швидкість і прискорення основної маси). Розглянуто різні форми і моделі ДГК, лінійних і нелінійних. Наводяться також результати досліджень багатомасових гасників, пошук їх оптимальних параметрів та ефективності для нестаціонарних навантажень. У разі розширення частотного діапазону зовнішнього впливу необхідне значення оптимальної маси гасника збільшується, і більш раціональним може виявитися введення багатомасового гасника. Детально розглянуті коливання систем з розподіленими параметрами (стрижнів, балок, мембран, пластин, оболонок), обладнаних динамічними гасниками. Наведено також практичне використання теорії і приклади систем віброзахисту. У роботі відзначається ефективність застосування динамічних гасників коливань для висячих мостових конструкцій, зокрема, оцінюється перспективність їх використання для пішохідних мостів. Багато сучасних конструкції таких мостів мають досить низькі значення декрементів коливань, а їх частоти відповідають діапазону, в якому коливання легко збуджуються пішоходами, що йдуть або біжать. Наводяться результати експериментального дослідження ефективності ДГК з в'язким тертям, встановленого посередині однопролітного балочного мосту довжиною 30м. Несуча сталева балка масою 22.5т мала основну частоту згинальних коливань 2,97 Гц, декремент 0.008. Маса гасника дорівнювала 87 кг або 1/130 від наведеної до середини прольоту маси балки. Налагодження та демпфування підбиралися для випадку дії гармонійної



сили з постійною амплітудою. Випробування проводилися для двох типів динамічних впливів: гармонійна сила, що діє посередині прольоту балки, і гармонійна сила, що рухається із заданою швидкістю по балці. Гасник зменшив максимальні переміщення балки при першому типі впливу в 5,5 - 6 разів, при другому - приблизно в 4 рази. Отримані практичні результати досить добре відповідали отриманому теоретичному розрахунку ефективності ДГК.

З численних статей, присвячених теорії систем з демпферами і динамічними гасниками, розглянемо деякі, що залишили помітний слід в теорії і практиці. Цикл робіт по віброгасінню виконав Snowdon J. C. [92-100] ще в 60-70-і роки. Так як налаштування динамічного гасника є вузькосмуговим і враховує, як правило, лише одну моду, Snowdon J. C., в роботі [95] розглядав облік трьох гасників, налаштованих на перші три власні частоти захищаємої системи. Як і в [42], було показано, що динамічні гасники можуть істотно знижувати амплітуди коливань в області резонансних частот, однак це призводить до появи «компенсаційних» резонансних піків, які і обумовлені введенням динамічних гасників. Відзначається, що їх амплітуди можна помітно знизити, якщо використовувати мале тертя в гаснику та велике значення коефіцієнта демпфування в пружних елементах, що підтримують конструкцію.

В роботі [107] Warburton G. V. показав, що при визначенні оптимальних параметрів гасника, який мінімізує динамічний відгук складної системи, останню можна розглядати як еквівалентну систему з одним ступенем свободи, якщо її власні частоти добре розділяються. В роботі отримані прості вирази для оптимальних параметрів гасника для незгасаючих коливань системи з одним ступенем свободи, для випадку навантаження у вигляді гармонійної сили або білого шуму. Ці вирази дозволяють мінімізувати різні параметри динамічного відгуку балки і можуть бути використані для отримання оптимальних параметрів гасників при розгляді складних систем, за умови, що власні частоти добре розділяються. В роботі також досліджується вплив демпфування основної системи на оптимальні параметри гасника.

Хронологія застосування і розвитку ДГК, його різних форм і варіантів оптимального налаштування наводиться в оглядовій роботі Sun J. Q., Jolly M. R., Norris M. A. [102]. Особлива увага приділяється необхідності адаптації до специфічних і мінливих в часі вимог системи. Відзначається, що для багатьох складних континуальних систем, наприклад, таких, як об'єкти цивільного будівництва або елементи фюзеляжу літаків, умови експлуатації можуть змінюватися з часом, що може привести до неефективної роботи гасника і більш того, збільшувати амплітуди коливань системи. Для таких систем бажано, щоб параметри гасника так само адаптувалися з часом. Це ставить новий виклик перед інженерами та дослідженнями останніх років. В роботі наводяться різні конфігурації адаптивних ДГК. Чисельні експерименти показали, що вони можуть бути налаштовані практично на будь-яку можливу частоту збудження. Більшість досліджень на дану тему включає жорсткість системи в набір параметрів при постановці задачі, і так як жорсткість системи зазвичай входить в шукану функцію в складному нелінійному вигляді, то доводиться мати справу з нелінійною задачею оптимізації. Ідея адаптивного ДГК проста, однак створення практичного і надійного адаптивного пристрою з використанням традиційних технологій, що задовольняє при цьому обмеженням по вазі, розмірам і вартості, є непростим завданням. У роботі відзначається, що всі існуючі дизайни адаптивних ДГК досить складні, а їх надійність і зручність експлуатації викликають сумніви, що є однією з причин їх досить вузького поширення на поточний момент. Більш того, механічні та електричні елементи подібних гасників накладають додаткові обмеження на налаштовувемий діапазон резонансних частот основної системи, а також на швидкість, з якою може відбуватися адаптація параметрів гасника.

Використання демпферів в'язкого і сухого тертя для гасіння коливань мостів розглядається в статті [19]. У роботі відзначається, що мостові конструкції, як і будь-які реальні механічні коливальні системи, мають властивість дисипації енергії, тому для адекватного опису процесів коливань модельні задачі повинні враховувати внутрішнє тертя в системі. Непружні опори різної природи також відіграють важливу роль при коливаннях мостів, так як від них залежать величини

амплітуд коливань прогонових будов, особливо в резонансному режимі. В роботі запропонована конфігурація демпфера в'язкого тертя для гасіння коливань пішохідних мостів.

Стаття Кулябко В. В. та ін. [29] присвячена питанню зв'язку демпферів і властивостей нелінійності системи. Відзначається, що експериментальні дослідження показують, що багато конструкцій, для яких приймаються лінійні або лінеаризовані схеми розрахунку, працюють набагато більш складним чином. Автори наводять нові конфігурації і схеми демпферів для різних видів нелінійності (геометричної, фізичної, конструкційної), однак питання розрахунку і розрахункових схем не будуть зачіпатися в даній роботі. У статті Кулябко В. В. [28] наведені варіанти нових демпфуючих пристроїв на прикладі пошуку ефективних нелінійних гасників згинальних коливань великопрольотних конструкцій, таких, як щогли, балки, пілони та інші.

В роботі [66] Gristchak V. Z., Ganilova O. A. розглянуто проблему динамічного завантаження п'єзоелектричної сендвіч-плити з демпфуванням, що змінюється у часі, для якої побудований наближений аналітичний розв'язок у замкненій форми за допомогою гібридного методу ВКБ – Галеркіна.

В роботі [76] K. Liu і G. Corroia вивчають оптимальні параметри налаштування для випадку, коли ДГК пов'язаний не тільки з основною системою, але також з точкою опори. При виборі критеріїв ефективності гасника аналогічно [42], пропонується використовувати числові методи для пошуку оптимальних значень налаштування гасника. Автори відзначають, що для обраної системи розглянутий варіант кріплення гасника до основної системи і до нерухомої точки дає кращий ефект гасіння коливань, ніж класичний варіант.

В роботі [37] Наумової Г.А., Пономаренко С.А, присвяченій коливанням Волгоградського моста, пропонується схема динамічного гасника коливань (Рис. 1.3). Особливістю даного гасника є його кріплення безпосередньо до прольоту моста, при цьому в'язке тертя створюється з використанням водного середовища, в даному випадку річки. Конструкція гасника складається з двох важливих елементів: гасника-поршня і склянки. Гасник-поршень представляє

собою залізобетонну плиту круглої форми, прикріплену за допомогою вантових тяг через шарнір до трубчастого тягового елемента. У верхній частині трубчастий тяговий елемент жорстко закріплений в середині одного з несудноплавних прольотів моста. Плита гасника-поршня розташовується нижче мінімально можливого рівня води. Друга частина конструкції гідродинамічного гасника є залізобетонний стакан. Верх склянки розміщується в товщі водного масиву вище максимально можливого рівня води, а низ спирається на фундамент. Положення днища склянки повинно забезпечувати розміщення плити гасника-поршня нижче мінімального рівня води. Стакан служить захистом поршневої частини конструкції. Автори підкреслюють високу економічність розробленого ними рішення, так як для моста в Волгограді, згідно їхньою оцінкою, досить було б установки одного такого гасника, що обійшовся б в 20 разів дешевше, ніж здійснене рішення.

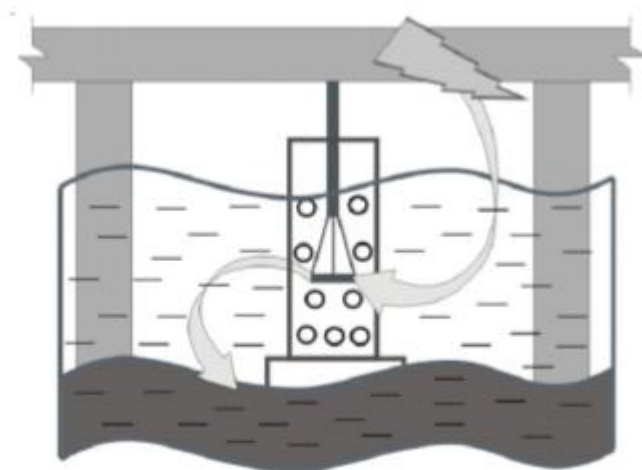


Рисунок 1.3 - Схема динамічного гасника коливань

Застосування динамічних гасників коливань для захисту конструкцій від сейсмічних впливів розглядається в роботі Шермухамедова У.З., Кузнецової І.О. [55]. Показано, що у випадках, коли вдається забезпечити умови гнучкості і міцності пружного зв'язку, ДГК виявляється найбільш ефективною системою сейсмотахисту і дозволяє знизити сейсмічне навантаження на спорудження в

кілька разів. В роботі особлива увага приділяється розгляду впливу помилок налаштувань на ефективність динамічних гасників різних мас. Як приклад розглядаються три гасника: гасника малої маси (маса становить 10% від маси захищеного об'єкта), гасник сумарної маси (маса дорівнює масі споруди, такі гасники характерні для сейсмосахисту мостових опор, коли в якості маси, що гасить, використовується металева прогінна будова), гасник великої (закритичної) маси (маса гасника перевищує масу конструкції більш, ніж в 2 рази; в якості практичного прикладу можна навести будівництво залізничної лінії Адлер-Сочі, коли маса нерозрізних залізобетонних прогонових будов цілком передавалася на одну опору при поздовжньому навантаженні). Оцінка ефективності ДГК проводилася шляхом порівняння з еталонними системами. За еталонні було обрано систему без гасника (опора без ДГК) та систему, в якій гасник жорстко приєднаний до опори. Оптимальними вважалися такі параметри, при яких зміщення системи є мінімальним в заданому діапазоні частот коливань. Оптимальні параметри по жорсткості і демпфуванню знаходилися за допомогою програмних комплексів Builder C ++ і Mathcad. Для оцінки ефективності були отримані АЧХ, за якими визначалася швидкість зміни переміщень системи в залежності від неточності в налаштуванні гасника. В результаті показано, що для гасників великої маси можна допустити істотні відхилення в налаштуванні від оптимальних, причому зона високої ефективності гасника істотно зростає із збільшенням відносної маси. Відзначається також, що ДГК більш чутливий до налаштування по частоті, ніж до налаштування по загасанню. Отримані оцінки дозволяють спростити завдання проектування сейсмічних захисних пристроїв для мостів, оскільки дозволяють варіювати розмір і параметри жорсткості проєктованих елементів сейсмічних захисних пристроїв.

### **1.3. Гасіння коливань балок**

Більшість досліджень по гасінню коливань з використанням демпферів і динамічних гасників оперує системами з однією або двома ступенями свободи. При переході до систем з розподіленими параметрами, зокрема, до балок,

необхідно враховувати наявність спектра власних значень, тобто можливість декількох резонансів. Друга важлива обставина - необхідність врахування внутрішнього тертя в балці. Існує багато спроб врахування внутрішнього тертя при розгляді процесу коливань. Однією з найбільш поширених моделей, що дозволяють врахувати внутрішнє тертя, є модель в'язкопружного тіла Фойгта, згідно з якою сила внутрішнього тертя в системі з одним ступенем свободи пропорційна швидкості (і, отже, частоті) коливань системи [48].

У монографії Snowdon JC [99], крім ретельного аналізу коливань з урахуванням найпростішого динамічного гасника в системах з пружних матеріалів, розглядаються і більш складні питання, такі, як коливання в пружних конструкціях, облік внутрішнього тертя в системі, облік зсувного зміщення, випадок дії декількох збуджуючих сил, облік декількох динамічних гасників і інші. Особлива увага приділяється вивченню областей значного загасання в частотній характеристиці балки при дії декількох навантажень, що має практичне значення для віброізоляції різних механічних систем. Для пошуку рішення використовується перетворення Лапласа, зокрема, для того, щоб врахувати перехідну поведінку динамічного гасника. Запропонований автором метод показує гарні результати в багатьох випадках, але тільки для консервативних систем.

Особливий інтерес в дослідженнях коливань балок з гасниками коливань представляє також питання вибору способу розрахунку балок, як континуальних систем з локальними впливами в місцях розташування гасників коливань, що залежать від шуканого динамічного режиму.

Це питання детально обговорювалося в монографії Коренева Б. Г., Резнікова Л. М. [26]. Автори [26, стр. 133] вважають, що «використання розкладів за формами коливань захищеної системи з приєднаними гасниками недоцільно, так як при врахуванні демпфування, яке для повної системи, як правило є «непропорційним», ці форми стають комплексними; а при зміні параметрів гасників форми необхідно перераховувати, також відзначається, що при наявності приєднаних зв'язків з залежними від частоти коефіцієнтами «форми коливань не мають властивості ортогональності». Автори відзначають, що всі вказані

особливості призводять до обчислювальних труднощів при розгляді подібних задач, в зв'язку з чим вважають кращим використовувати методи будівельної механіки, такі, як метод сил, метод переміщень або змішаний метод. У методі сил, в якості основної приймається захищаєма система без приєднаних локальних зв'язків, за невідомі приймаються амплітуди переміщень або амплітуди реакцій; при наявності проміжних опор, приєднаних точкових мас або ДГК застосовується метод початкових параметрів, який дозволяє отримати рішення для будь-яких граничних умов. Такий підхід дозволяє отримати точне рішення задачі для стаціонарних коливань при гармонійному збудженні. Однак, він все-таки досить громіздкий, так як вимагає, як правило, багаторазового рішення задачі, в тому числі при локальних впливах.

У довіднику [51] розглядаються питання коливань фундаментів, мостів та інших конструкцій та їх елементів. Підкреслюється важливість врахування внутрішнього тертя при розгляді коливань, а також наводиться таблиця коефіцієнтів внутрішнього поглинання для різних матеріалів та конструкцій на основі експериментальних даних. У якості модельних задач розглядаються задачі про вільні та вимушені поперечні коливання балок, при цьому враховується внутрішнє тертя в системі. Аналіз результатів приводиться на прикладі класичної моделі балки Ейлера-Бернуллі, у якості віброізолюючих елементів розглядаються гумові, пружинні, комбіновані (пружинно-гумові) віброізолятори, демпфери в'язкого тертя, демпфери сухого тертя та інші. Підкреслюється, що у багатьох випадках можна обмежитися розглядом системи з одним ступенем свободи та налаштуванням гасника на першу власну частоту, котра дає найбільший вклад в розв'язок задачі про вимушені коливання. Реальний розрахунок проводиться на прикладі центрифуги з використанням комбінованих демпферів.

Дослідження використання динамічного гасника, налаштованого на першу власну частоту, проводилось і в [84] для задачі продольних коливань стрижня. В роботі також розглянут ефект додавання одного або двох динамічних гасників, а також ефект додавання тільки точкової маси, обговорюється також питання налаштування гасника та оптимізації демпфування.

Динаміка балки на пружній основі з приєднаним до неї динамічним гасником коливаль, розглядається в роботі Гришака В. З., Д'яченко Т. А. [11]. Досліджується процес коливаль літального апарату з гасником поблизу збуреної поверхності. Розглядаються лінійний та нелінійний випадки, у першому випадку аналітичний розв'язок отримується за допомогою використання методу Фур'є та методу варіації довільних сталих, у другому до вищезазначених методів додається метод малого параметру. Отримані результати дають можливість дослідити вплив фізичних параметрів на величину переміщення балки при коливаннях.

В статті J.-S.Wu - W.Chen [109] запроновано метод розв'язання задач о коливаннях балок з гасниками на прикладі аналізу вільних та вимушених коливаль консольної балки з приєднаними гасниками. Аналіз був виконаний за допомогою аналітичного та чисельного комбінованого методів (АЧКМ). В роботі була запронована заміна кожного гасника на еквівалентну безмасову систему з ефективною постійною жорсткістю та ефективним демпфуючим коефіцієнтом, з метою використання АЧКМ для даної задачі. Потім рівняння руху балки (з врахуванням приєднаних гасників) розв'язувалось за допомогою розкладу по власним формам тієї ж балки, але без гасників та будь-яких інших зв'язків. Власні частоти та амплітуди коливаль такої балки визначались за допомогою стандартних чисельних методів. Для порівняння та підтвердження надійності запронованого методу проводилось порівняння з результатами, отриманими за допомогою методу кінцевих елементів, в роботі зауважується, що отримано досить добре узгодження результатів. Також вивчався вплив величини демпфування кожного демпфера на власні частоти та амплітуди прогинів. Було показано, що запронований метод має більше переваг ніж метод кінцевих елементів, так як порядок рівнянь руху балки у запронованому методі набагато нижче, ніж у методі кінцевих елементів.

У працях, наведених вище, зверталась увага на труднощі при розгляді задач про вимушені коливання балок з динамічними гасниками коливаль, що розташовані в дискретних точках, а також труднощі, пов'язані з необхідністю врахування внутрішнього тертя в самій балці. Складність отриманого аналітичного рівняння в таких задачах призводить до того, що при розв'язанні частіше за все



обмежуються найпростішими моделями з одним ступенем свободи, котрі, однак, не можуть дати адекватного опису динаміки балки. Так, в роботі Марочки В. В. [32] наводиться динамічний розрахунок прогінних будов з демпферами в'язкого тертя в межах моделі системи з одним ступенем свободи. Розв'язок задачі о коливаннях прольоту моста з врахуванням демпферів наведений в чисельному вигляді з використанням алгоритма Ньюмарка. Також наведені результати експерименту, в якому досліджуються коливання сталюї балки довжиною 2м, балка спирається на рухому та нерухому опори, до поперечного перерізу опор приєднуються демпфери в'язкого тертя, а посередині прольота балки розташований неврівноважений ротор. Верифікація результатів, отриманих з використанням запропонованого методу розрахунку, показує, що такий спрощений розрахунок не може дати адекватного опису роботи демпфера - відхилення чисельного рішення від експерименту складає більш 40%.

В статті Баргуєва С. Г., Богданова А. С., Міжидона А. Д. [5] вивчається ефективність використання гасників на прикладі задачі о вимушених коливаннях пружного стрижня. Шукані амплітуди коливань пружного стрижня обчислюються за допомогою функцій Крилова, невідомі коефіцієнти котрого визначаються при розв'язку крайової задачі. Точкове застосування сили враховується, за допомогою введення функції Хевісайда в шукане рівняння. Аналогічне дослідження проведено і в [35], однак, наближений розв'язок отриманий з використанням методу багатьох масштабів.

Задача про вимушенні коливання однопрогонова шарнірно закріпленої балки з приєднаними до неї гасниками розглядаються в роботі Ярошенко Г. С. [56]. Автор підкреслює, що більшість робіт використовує лінеаризовані характеристики для нелінійних систем, однак, часто це не дає адекватного опису процесу. В роботі наголошується важливість врахування внутрішнього тертя та використання системи з нескінченною кількістю ступеней свободи. Проводиться порівняльний аналіз демпферів з сухим та в'язким тертям, а також пари послідовно приєднаних ДГК. Показано, що із розглянутих варіантів найбільш ефективним виявився ДГК з в'язким тертям (при дії гармонійного навантаження в середині прольоту). Пара

ДГК виявилася тим менше ефективніше, чим далі розташовані точки їх застосування від точки дії зосередженої сили. В роботі також даються рекомендації з підбору оптимальних значень параметрів ДГК з в'язким тертям.

#### **1.4. Використання неklasичних моделей балки**

У роботах, згаданих раніше, використовується класична теорія балок Ейлера-Бернуллі. Дана теорія використовує гіпотезу плоских перерізів і нехтує зсувною деформацією в поперечних перетинах балки. Такі спрощення можуть призводити до помітних похибок при вирішенні ряду задач, що в свою чергу призвело до появи уточнених теорій. Однією з таких теорій, уточнюючих класичну теорію балок, є модель Тимошенко [103]. Основні рівняння коливань балки Тимошенко враховують дотичні напруження в поперечному перерізі, а також момент сил інерції елемента балки. Кут нахилу дотичній до вигнутої осі не збігається з кутом повороту поперечних перерізів, він включає також складову від зсуву. Різні дослідження підтверджують, що ці поправки можуть мати велике значення при розрахунку форм коливань з високими частотами, коли розміри поперечного перерізу стрижня можна порівняти з довжиною самої балки.

Принципові проблеми теорії балки Тимошенко (БТ) були досліджені в роботах 1950-60 рр. [105, 70, 88]. З математичної точки зору, головна особливість теорії БТ полягає в тому, що напружено-деформований стан в точці визначається двовимірним вектором (кутом зсуву і поперечним переміщенням балки), на відміну від скаляра (тільки переміщення) в моделях Ейлера-Бернуллі і Релея. Правильні умови ортогональності власних форм для моделі БТ були встановлені в роботах [59, 63] (в безрозмірних величинах - в роботі [81]).

Роботи по теорії коливань БТ (без демпферів і ДГК), виконані до середини 1971 р приведені і проаналізовані в огляді Гріголюка Е. І., Селезова І. Т. [22]. Основний їх результат полягає в оцінці впливу поперечного зсуву та інерції обертання на власні частоти та вимушені коливання балок в залежності від відносної довжини і частоти збудження.

У монографії Wang C. M., Reddy J. N., Lee K. H. [106] було показано, що

вплив зсувної податливості зростає з ростом згинального моменту в балці Ейлера-Бернуллі. Автори відзначають, що отримані ними залежності спрощують перехід до моделі балки Тимошенко безпосередньо в рішенні для балки Ейлера-Бернуллі.

В роботі Manevich A., Kolakowsky Z. [82] для вирішення задачі про вільні і вимушені коливання балки Тимошенко пропонується нова зручна безрозмірна форма рівнянь руху балки, що залежить лише від двох параметрів, один з яких пов'язаний з деформацією зсуву, а другий з в'язким внутрішнім тертям. Аналіз впливу цих параметрів на власні частоти балки виконується на прикладі шарнірно закріпленої балки. У чисельному аналізі підкреслюється важливість врахування внутрішнього тертя при дослідженнях в області резонансу, а також відзначається, що зсувна податливість, яка помітно зменшує власну частоту балки, призводить до зсуву резонансного піку. Цей зсув стає значним для відносно коротких довжин хвиль. Одночасно зі зменшенням частоти спостерігається збільшення резонансного піку в порівнянні з класичною балкою Ейлера-Бернуллі.

Метод модального аналізу (ММ) розглядається Kim T., Park I., Lee U. [73], як ефективний спосіб отримання динамічного відгуку балки в аналітичному вигляді. Однак, для його використання апіорі необхідна точна інформація про власні частоти, власні форми і їх ортогональність. Докладний огляд літератури в даній роботі показує, що необхідна інформація, що міститься в існуючій літературі, часто дуже обмежена або неповна навіть для простих конфігурацій балок Тимошенко. У роботі наводиться повна інформація про власні частоти, трьох перших власних форм і їх ортогональність для шарнірно закріпленої балки Тимошенко. Грунтуючись на цій інформації, використовується метод ММ для отримання рішення задачі про вимушені коливання шарнірно-опертої балки Тимошенко, для випадку стаціонарного або змінного навантаження (точкової поперечної сили і точкового згинального моменту, що рухається уздовж балки з постійною швидкістю) в аналітичному вигляді. Потім аналізується внесок кожної з мод на вигляд форми коливань для випадків стаціонарного і змінного навантажень. Автори відзначають, що проблема пошуку ефективного розв'язання задач про коливання балки Тимошенко все ще стоїть гостро і є предметом активних

досліджень. У різних роботах вдаються до таких методів, як розкладання за власними функціями, методи складання власних форм, методи інтегральних перетворень (Лапласа-Карсона, Фур'є), метод Гальоркіна, методи кінцевих елементів і скінченних різниць та інші.

У літературі є лише поодинокі роботи, в яких розглядається динаміка балки Тимошенко з демпферами і гасниками коливань.

Так в роботі E. Esmailzadeh, N. Jalili [64] розглядається задача проектування оптимальних ДГК для балки Тимошенко з внутрішнім тертям, яка знаходиться під впливом довільної розподіленої збуджуючої гармонійної сили. Для кожного гасника із заданою масою визначаються оптимальні коефіцієнти жорсткості і демпфування, щоб мінімізувати динамічний відгук балки на резонансних частотах, на яких вони працюють. Кожен з гасників налаштовується на різний резонанс, але враховується взаємодія між гасниками. Оптимальні коефіцієнти настройки і демпфування гасників, кожен з яких налаштований на певну моду, визначаються чисельно, шляхом вирішення задачі оптимізації з використанням методу Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Результати показують, що оптимальні значення параметрів гасника залежать від різних факторів, таких, як точка прикладання сили, точка прикладання гасників, режиму роботи балки, при якому динамічний відгук балки повинен бути зведений до мінімуму, а також від таких характеристик балки, як інерція обертання, деформація зсуву, внутрішнє тертя і геометрія поперечного перерізу. У наведених в даній роботі прикладах продемонстровано можливість використання запропонованого підходу для мінімізації динамічного відгуку балки в широкому діапазоні частот.

Деякі результати аналізу динаміки балки Тимошенко з приєднаними гасниками маятникового типу наведені в роботі [34].

### **1.5. Висновки по розділу 1**

На основі аналітичного огляду літератури, наведеного вище, можна зробити наступні висновки.

1. Успішні приклади використання демпферів на різних етапах експлуатації конструкцій дозволяють розглядати демпфери і ДГК як ефективні засоби пригнічення небезпечних коливань, проте їх ефективність істотно залежить від правильного вибору їх параметрів.
2. Наявна велика кількість літератури по розрахунку та проектуванню систем з демпферами і ДГК відноситься переважно до систем з одним ступенем свободи.
3. Більшість робіт по динаміці балок використовувало класичну теорію балок Ейлера-Бернуллі, що обмежує область застосування отриманих рішень. Роботи останніх десятиліть, як правило, оперують некласичними теоріями балок (а також пластин і оболонок).
4. Принципово важливим для розрахунку динаміки балкових систем в області резонансу є облік внутрішнього тертя в балці.
5. Є лише поодинокі роботи по динаміці балок з урахуванням зсувних деформацій (модель Тимошенко) і внутрішнього в'язкого тертя при наявності демпферів і ДГК; ці роботи свідчать про важливість обліку зазначених двох факторів при проектуванні і розрахунку балкових конструкцій.

Сказане вище дозволяє зробити висновок про теоретичну і практичну важливість дослідження задач про коливання балкових систем з динамічними гасниками коливань і демпферами з позицій некласичних теорій і з урахуванням внутрішнього тертя, тобто з використанням моделей в'язкопружного матеріалу.

### **1.6. Список використаних джерел в розділі 1**

У розділі 1 використані джерела [11, 14, 41-42, 84-85, 37-39, 87-88, 59-60, 2, 45-46, 48-52, 26, 92-100, 107, 102-103, 19, 28-29, 76, 55-56, 66, 109, 32, 34-35, 105, 70, 81-82, 22, 73, 66-67]. Їх найменування представлені у загальному списку використаних джерел.

## РОЗДІЛ 2.

### ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗОК

Нижче отримані диференційні рівняння вимушених коливань в'язкопружної балки Тимошенко (БТ) з урахуванням різних розподілених і зосереджених впливів, включаючи наявність демпферів, динамічних гасників коливань, точкових мас (Рис. 2.1). Рівняння коливань в'язкопружної балки Тимошенко без зосереджених впливів були отримані раніше в роботах Lee Н.С. [75], Pan Н.Н. [88]. У недавній роботі А. І. Маневича і З. Колаковського [82] рівняння динаміки в'язкопружної балки Тимошенко були представлені в зручній безрозмірній формі, що включає лише два безрозмірних параметра балки, що характеризують зсувну податливість і внутрішнє тертя. Ці рівняння нижче доповнені з урахуванням розподілених моментів  $m_0(x,t)$  облік моментів сил інерції в точкових масах) і зовнішнього демпфування (зосереджені сили описані за допомогою  $\delta$ -функції).

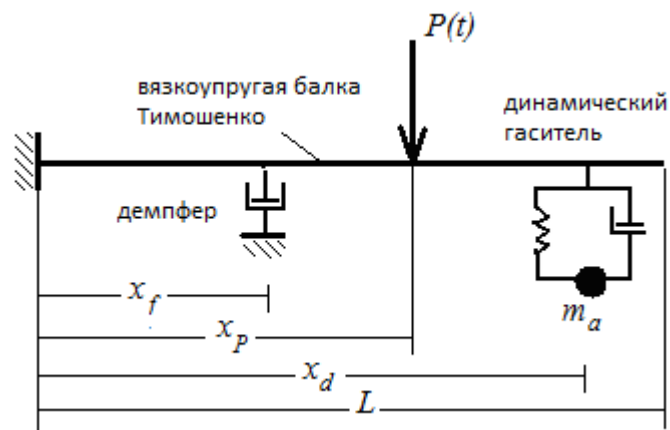


Рисунок 2.1 - Механічна модель

#### 2.1. Диференційні рівняння динаміки в'язкопружної балки Тимошенко при дії розподіленого навантаження

Отримаємо рівняння коливань балки Тимошенко при дії довільного розподіленого навантаження  $q_0(x,t)$ , використовуючи, для в'язкопружного матеріалу, модель Фойгта [48].

Деформації в БТ описуються двома незалежними функціями - повним прогином  $y(x,t)$  і кутом повороту перетину  $\psi(x,t)$ . Сумарний кут нахилу зігнутої осі балки ( $\gamma$  - кут зсуву)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \gamma. \quad (2.1)$$

Поздовжнє переміщення точки на відстані  $z$  від нейтральної осі дорівнює  $u = -z\psi$ , а поздовжня деформація  $\varepsilon_x = \partial u / \partial x = -z \partial \psi / \partial x$

Вираз для нормальних напружень відповідно до закону Фойгта приймається у вигляді

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + k_0 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = E \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_x, \quad \mu = \frac{k_0}{E} \quad (2.2)$$

де  $k_0$  - постійна, а  $\mu$  - параметр внутрішнього в'язкого тертя.

Аналогічний закон приймається для дотичних напружень

$$\tau = G \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma. \quad (2.3)$$

Інтегруючи по висоті балки  $z$ , отримуємо згинальний момент в поперечному перерізі ( $J$  – момент інерції поперечного перерізу):

$$M = -EJ \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Поперечна сила дорівнює (з врахуванням (2.1)):

$$Q = k'A\tau = k'AG \left( 1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right), \quad (2.5)$$

де  $k'$  - коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу (для прямокутного перерізу дорівнює 0.833, див. Тимошенко С. П. [52]),  $A$  – площа поперечного перерізу.

Рівняння рівноваги сил для балки при дії розподіленого навантаження  $q_0(x,t)$  та розподіленого моменту  $m_0(x,t)$  з врахуванням сил інерції  $-\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , момента сил інерції  $-\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ , а також сил та моментів сил зовнішнього в'язкого тертя (котрі

пов'язані відповідно з лінійною швидкістю  $-\beta_1 \partial y / \partial t$  та кутовою швидкістю  $-\beta_2 \partial \psi / \partial t$ ) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \beta_1 \frac{\partial y}{\partial t} + q_0(x, t) &= 0, \\ -\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + Q - \frac{\partial M}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + m_0(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ці рівняння з урахуванням співвідношень (2.4), (2.5) призводять до двох диференціальних рівнянь руху щодо функцій  $y$  та  $\psi$ :

$$\begin{aligned} k'GA \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right) - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \beta_1 \frac{\partial y}{\partial t} + q_0(x, t) &= 0, \\ -\rho J \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + k'AG \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi\right) + EJ \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + m_0(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

У випадку  $m_0(x, t) = 0$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = 0$ , виключаючи з цих двох рівнянь змінну  $\psi$ , приходимо до рівняння відносно прогину  $y(x, t)$ :

$$EJ \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (2.8)$$

При  $\mu = 0$  рівняння (2.8) переходить у відоме рівняння для балки з пружного матеріалу (Тимошенко [52])

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho J \left(1 + \frac{E}{k'G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{k'G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \quad (2.9)$$

Однак, як правило, зручніше розв'язувати систему двох рівнянь (2.7)

## 2.2. Безрозмірні рівняння. Граничні умови

Дотримуючись роботи [30], введемо безрозмірні параметри

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \quad Y = \frac{y}{r_0}, \quad \tau = \frac{c}{r_0} t, \quad \chi = \frac{E}{k'G}, \quad \mu^* = \frac{c}{r_0} \mu, \quad q = \frac{q_0 r_0}{EA}, \quad (2.10)$$

$$m = \frac{m_0}{r_0 \rho A}, \quad \beta_1^* = \frac{c r_0}{EA} \beta_1, \quad \beta_2^* = \frac{c}{EA} \beta_2,$$

де  $c = \sqrt{E/\rho}$  - швидкість звуку в матеріалі балки,  $r_0 = \sqrt{J/A}$  - радіус інерції



поперечного перерізу,  $\mu^*$  - безрозмірний параметр внутрішнього в'язкого тертя,  $\chi$  – параметр, що характеризує податливість балки на зсув. У класичній моделі балки Ейлера-Бернуллі (Е-Б) приймається  $\chi = 0$ , що відповідає нескінченно великій жорсткості на зсув.

Рівняння (2.7) в безрозмірних змінних приймають вид

$$\begin{aligned} \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) - \chi \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} - \beta_1^* \chi \frac{\partial Y}{\partial \tau} + \chi q(\xi, \tau) &= 0, \\ -\chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) + \chi \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \beta_2^* \chi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \chi m(\xi, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для вільних коливань в'язкопружної БТ ці рівняння зводяться до системи:

$$\begin{aligned} \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) - \chi \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} - \beta_1^* \chi \frac{\partial Y}{\partial \tau} &= 0, \\ -\chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) + \chi \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \beta_2^* \chi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Класичні граничні умови в безрозмірних параметрах записуються у вигляді:

1. Шарнірне закріплення:

$$Y = 0, \quad M = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0. \quad (2.13)$$

2. Жорстке закріплення:

$$Y = 0, \quad \psi = 0. \quad (2.14)$$

3. Вільний край:

$$M = 0, \quad Q = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi = 0. \quad (2.15)$$

### 2.3. Власні форми коливань пружної БТ і умови їх ортогональності.

Розглянемо спочатку пружну балку ( $\mu^* = 0$ ) довжиною  $l$  без зовнішнього тертя ( $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ), на кожному з кінців якої виконується одна з умов (2.14)-(2.16). З (2.12) отримаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) - \chi \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} = 0, \quad (2.16, a)$$

$$-\chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) + \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.16, b)$$

Для знаходження власних частот і форм коливань БТ підставляємо в цю систему рішення в формі гармонійних коливань

$$Y(\xi, \tau) = e^{i\omega\tau} \tilde{Y}(\xi), \quad \psi(\xi, \tau) = e^{i\omega\tau} \Psi(\xi), \quad (2.17)$$

(тут  $\omega$  - власна частота коливань у часі  $\tau$ ; власна частота  $\omega_0$  в початковому часі  $t$  дорівнює  $\omega_0 = (c/r_0)\omega$ ). Тоді (2.16) зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{dY}{d\xi} - \Psi \right) = -\chi\omega^2 Y, \quad (2.18, a)$$

$$\chi \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + \frac{dY}{d\xi} = \Psi (1 - \chi\omega^2). \quad (2.18, б)$$

З (2.18) можна отримати «незв'язану» систему рівнянь

$$Y^{IV} + (1 + \chi)\omega^2 Y - \omega^2(1 - \chi\omega^2)Y = 0, \quad (2.19, a)$$

$$\Psi^{IV} + (1 + \chi)\omega^2 \Psi - \omega^2(1 - \chi\omega^2)\Psi = 0 \quad (2.19, б)$$

з характеристичним рівнянням

$$k^4 + \omega^2(1 + \chi)k^2 + \omega^2(\chi\omega^2 - 1) = 0. \quad (2.20)$$

З (2.20) для заданих граничних умов балки можна знайти спектр власних частот  $\omega_j$ , а потім з (2.18) або (2.19) отримати власні форми  $(Y_j, \Psi_j)$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ). (докладний аналіз власних частот і форм коливань БТ буде дано в наступному розділі; тут розглядаються лише питання, пов'язані з застосуванням власних форм до розв'язання задачі про вимушені коливання).

Власні форми і частоти задовольняють рівнянням (2.18):

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{dY_j}{d\xi} - \Psi_j \right) = -\chi \omega_j^2 Y_j, \quad \chi \frac{d^2 \Psi_j}{d\xi^2} + \frac{dY_j}{d\xi} = \Psi_j (1 - \chi \omega_j^2). \quad (2.21)$$

Умова ортогональності власних форм для балки Тимошенко, справедлива для зазначених трьох типів граничних умов (2.13) - (2.15), в прийнятих безрозмірних змінних (2.10) має вигляд:

$$\int_0^{l/r_0} (Y_m Y_n + \Psi_m \Psi_n) d\xi = 0. \quad (2.22, a)$$

Власні функції БТ будемо розглядати як векторні функції  $Z_j = (Y_j, \Psi_j)$ , тоді умови ортогональності (2.22, а) можна записати у вигляді

$$\int_0^{l/r_0} Z_m Z_n d\xi = 0. \quad (2.23, б)$$

Нормування власних форм зручно задавати умовою

$$\int_0^{l/r_0} Z_j^2 d\xi = 1 \quad (\text{або} \quad \int_0^{l/r_0} (Y_j^2 + \Psi_j^2) d\xi = 1). \quad (2.24)$$

Для використання розкладання форми вимушених коливань за власними функціями необхідно також наступне твердження.

*Дві довільні функції  $f(x)$  та  $g(x)$  на інтервалі  $(0, l)$  можна розкласти по власним функціям  $Y_j$ ,  $\Psi_j$  в наступному вигляді:*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(x), \quad g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varsigma_j \Psi_j(x). \quad (2.25)$$

Можливість такого розкладу (з однаковими коефіцієнтами  $\zeta_j$  для обох функцій) і вирази для коефіцієнтів  $\zeta_j$  впливають з властивості повноти систем власних функцій (див. Нерманн Г. [70]) і таких міркувань. Якщо ввести векторну функцію  $E(x) = [f(x), g(x)]$  зі скалярним добутком

$$E_1(x) \bullet E_2(x) = \int_0^l [f_1(x) f_2(x) + g_1(x) g_2(x)] dx$$

то розкладання (2.24) рівносильні розкладанню векторної функції

$$E(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Z_j(x). \quad (2.26)$$

Помножимо (2.25) на  $Z_j(x)$  і проінтегруємо від 0 до  $l$ , тоді з урахуванням умови ортогональності (2.22) і нормування (2.23) отримаємо

$$\zeta_j = \int_0^l E(x) \cdot Z_j(x) dx \quad (2.27, a)$$

або

$$\zeta_j = \int_0^l [f(x)Y_j(x) + g(x)\Psi_j(x)] dx. \quad (2.26, б)$$

Таким чином, коефіцієнти  $\zeta_j$  однозначно визначаються для довільної пари функцій  $f(x)$  та  $g(x)$ .

## **2.4. Розв'язання задачі про коливання в'язкопружної балки Тимошенко (без демпферів і ДГК) при дії гармонійного навантаження**

### **2.4.1. Загальний розв'язок**

Диференційні рівняння (2.11) включають в себе непарні за часом часткові похідні (в тому числі змішані), що з'являються внаслідок врахування в'язкопружних властивостей матеріалу і зовнішнього тертя. Як відомо, при наявності цих похідних звичайний (класичний) поділ змінних в дійсній області шуканих функцій в загальному випадку стає неможливим. З цією проблемою дослідники стикалися при вирішенні різних задач динаміки, зокрема, задачі динаміки конструкцій з урахуванням гіроскопічних (коріолісових) сил інерції. У роботах О.А. Горошко, А.Г. Дем'яненко, С.П. Киби [9, 10, 12, 24] для подолання цієї проблеми пропонувалося і використовувалося «двохвильове уявлення» коливань, з виділенням «власних» і «супроводжуючих» коливань. У даній роботі зазначена труднощі долається завдяки переходу в комплексну площину, в якій поділ змінних стає можливим. Такий підхід в ідейному плані еквівалентний методу «двохвильового уявлення», але видається більш простим в реалізації.

Розглянемо вимушені коливання БТ при дії гармонійного зовнішнього навантаження

$$q = q(\xi)e^{i\Omega\tau}, \quad m = m(\xi)e^{i\Omega\tau}, \quad (2.28)$$

де  $\Omega$  - частота в часі  $\tau$ . Будемо шукати усталені розв'язки (стаціонарні), які також є гармонійними з тією ж частотою:

$$Y(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} Y_s(\xi), \quad \psi(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} \Psi_s(\xi). \quad (2.29)$$

Тоді система (2.11) зводиться до звичайних диференціальних рівнянь (індекс «s» далі опускається) :

$$(1 + i\mu^* \Omega) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dY}{d\xi} - \Psi \right) + \Omega^2 \chi Y - i\Omega \beta_1^* \chi Y + \chi q(\xi) = 0, \quad (2.30)$$

$$\chi \Omega^2 \Psi + (1 + i\mu^* \Omega) \left( \frac{dY}{d\xi} - \Psi \right) + \chi (1 + i\mu^* \Omega) \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} - i\Omega \beta_2^* \chi \Psi + \chi m(\xi) = 0.$$

Далі нормовані коефіцієнти зовнішнього тертя приймаються рівними  $\beta_1^* = \beta_2^* = \beta^*$ .

Функції  $Y(\xi)$  та  $\Psi(\xi)$  розкладаємо по власним функціям  $Y_j$ ,  $\Psi_j$  пружної БТ:

$$Y(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi), \quad \Psi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \Psi_j(\xi). \quad (2.31)$$

Всі члени в цих розкладах задовольняють граничним умовам для БТ і системі рівнянь (2.16):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial Y_j}{\partial \xi} - \Psi_j \right) - \chi \frac{\partial^2 Y_j}{\partial \tau^2} - \beta_1^* \chi \frac{\partial Y_j}{\partial \tau} = 0, \quad (2.32)$$

$$-\chi \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \tau^2} + \left( \frac{\partial Y_j}{\partial \xi} - \Psi_j \right) + \chi \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \xi^2} - \beta_2^* \chi \frac{\partial \Psi_j}{\partial \tau} = 0.$$

Подстановка (2.31) в (2.29) дає:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left[ (1 + i\mu^* \Omega) \left( -\frac{d^2 Y_j}{d\xi^2} + \frac{d\Psi_j}{d\xi} \right) - \Omega^2 \chi Y_j + i\Omega \beta^* \chi Y_j \right] = \chi q(\xi), \quad (2.33)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left[ (1 + i\mu^* \Omega) \left( -\frac{\partial Y_j}{\partial \xi} - \chi \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial \xi^2} + \Psi_j(\xi) \right) - \Omega^2 \chi \Psi_j + i\Omega \beta^* \chi \Psi_j \right] = \chi m(\xi).$$

Ця система рівнянь з урахуванням рівнянь для власних форм (2.31) може бути записана у вигляді:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j (\omega_j^2 - \lambda) Y_j(\xi) = \frac{q(\xi)}{1 + i \mu^* \Omega}, \quad (2.34)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j (\omega_j^2 - \lambda) \Psi_j(\xi) = \frac{m(\xi)}{1 + i \mu^* \Omega},$$

де

$$\lambda = \frac{\Omega (\Omega - i \beta^*)}{1 + i \Omega \mu^*}. \quad (2.35)$$

Помножимо обидва рівняння (2.33) на  $Y_k(\xi)$  та  $\Psi_k(\xi)$ , відповідно, для  $k=1,2,\dots$ , проінтегруємо отримані рівності по довжині балки і складемо обидві рівності. З урахуванням умов ортогональності (2.22) отримаємо:

$$\zeta_k (\omega_k^2 - p) \int_0^{l/r_0} (Y_k^2 + \Psi_k^2) d\xi = \frac{1}{1 + i \mu^* \Omega} \int_0^{l/r_0} (q(\xi) Y_k + m(\xi) \Psi_k) d\xi. \quad (2.36)$$

З урахуванням нормування (2.23) отримаємо коефіцієнти розкладу

$$\zeta_k = \frac{1}{1 + i \mu^* \Omega} \frac{\int_0^{l/r_0} (q(\xi) Y_k + m(\xi) \Psi_k) d\xi}{\omega_k^2 - \lambda} = \frac{\int_0^{l/r_0} (q(\xi) Y_k + m(\xi) \Psi_k) d\xi}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + i \Omega (\mu^* \omega_k^2 + \beta^*)}. \quad (2.37)$$

Цей вираз може бути записаний в показовій формі:

$$\zeta_k = a_k e^{i\theta_k}, \quad a_k = \frac{\int_0^{l/r_0} (q(\xi) Y_k + m(\xi) \Psi_k) d\xi}{\sqrt{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 (\mu^* \omega_k^2 + \beta^*)^2}}, \quad \operatorname{tg} \theta_k = -\frac{\Omega (\mu^* \omega_k^2 + \beta^*)}{\omega_k^2 - \Omega^2}. \quad (2.38)$$

Тепер амплітудні функції повного прогину і кута повороту поперечного перерізу (2.30) мають вигляд:

$$Y(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta_k} Y_k(\xi), \quad \Psi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta_k} \Psi_k(\xi). \quad (2.39)$$

Остаточню, рішення задачі про усталені вимушені коливання в'язкопружної БТ (2.28) набуде вигляду:

$$Y(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta_k} Y_k(\xi), \quad \Psi(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta_k} \Psi_k(\xi). \quad (2.40)$$

або в алгебраїчній формі:

$$Y(\xi, \tau) = Y_{Re}(\xi, \tau) + iY_{Im}(\xi, \tau), \quad \Psi(\xi, \tau) = \Psi_{Re}(\xi, \tau) + i\Psi_{Im}(\xi, \tau). \quad (2.41)$$

де  $Y_{Re}(\xi, \tau)$ ,  $Y_{Im}(\xi, \tau)$  и  $\Psi_{Re}(\xi, \tau)$ ,  $\Psi_{Im}(\xi, \tau)$  є дійсними і уявними частинами функцій  $Y(\xi, \tau)$  та  $\Psi(\xi, \tau)$

$$Y_{Re}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Y_k(\xi) \cos(\Omega\tau + \theta_k), \quad Y_{Im}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Y_k(\xi) \sin(\Omega\tau + \theta_k), \quad (2.42)$$

$$\Psi_{Re}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k(\xi) \cos(\Omega\tau + \theta_k), \quad \Psi_{Im}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k(\xi) \sin(\Omega\tau + \theta_k).$$

(дійсні та уявні частини (2.41) є рішеннями задач, в яких збуджуюча сила є функцією часу  $\cos\Omega\tau$  або  $\sin\Omega\tau$ , відповідно).

#### 2.4.2. Дія зосередженої гармонійної сили

Якщо зовнішнє навантаження є зосередженою гармонійною силою з амплітудою  $P$  і прикладена в точці  $x_p = r_0 \xi_p$ , тоді навантаження враховується за допомогою дельта-функції:  $q_0(x) = P \delta(x - x_p)$ . У безрозмірних параметрах з урахуванням відомої тотожності  $\delta(x) = \delta(\xi) / r_0$  для  $\delta$ -функції від  $x = r_0 \xi$ : маємо:

$$q(\xi) \equiv \frac{q_0 r_0}{EA} = \hat{P} \delta(\xi - \xi_p), \quad (\hat{P} = \frac{P}{EA}). \quad (2.43)$$

Чисельник у формулах (2.36), (2.37) з урахуванням умови  $m = 0$  матиме вигляд

$$\int_0^{l/r_0} q(\xi) Y_k(\xi) d\xi = \hat{P} \int_0^{l/r_0} Y_k(\xi) \delta(\xi - \xi_p) d\xi = \hat{P} Y_k(\xi_p), \quad (2.44)$$

і (2.37), (2.37) запишеться у вигляді:

$$\zeta_k = \frac{\widehat{P}Y_k(\xi_P)}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + i\Omega(\mu^* \omega_k^2 + \beta^*)}, \quad a_k = \frac{\widehat{P}Y_k(\xi_P)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2(\mu^* \omega_k^2 + \beta^*)^2}} \quad (2.45)$$

і (формули (2.38)-(2.31) залишаються незмінними).

### 2.4.3. Одномодове наближення

Очевидно, що в деяких випадках може бути достатньою одномодова апроксимація, наприклад, в разі, коли частота навантаження близька до першої власної частоти (або менше її), а друга і більш високі власні частоти значно вище. Тоді тільки перший доданок в розкладанні (2.30) є істотним (за винятком особливих випадків застосування зосередженої сили), і іншими складовими можна знехтувати. Аналогічно, якщо частота зовнішнього навантаження дуже близька до певної власної частоти  $\omega_k$ , можна очікувати, що мода вимушених коливань буде близька до  $k$ -й власної моди.

Для одномодового наближення, при  $k=1$ , розв'язок (2.39)- (2.41) зведеться до

$$Y(\xi, \tau) = a_1 e^{i(\Omega\tau + \theta_1)} Y_1(\xi), \quad \Psi(\xi, \tau) = a_1 e^{i(\Omega\tau + \theta_1)} \Psi_1(\xi), \quad (2.46)$$

де

$$a_1 = \frac{\int_0^{l/r_0} (q(\xi)Y_1 + m(\xi)\Psi_1) d\xi}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2(\mu^* \omega_1^2 + \beta^*)^2}}, \quad \text{tg } \theta_1 = -\frac{\Omega(\mu^* \omega_1^2 + \beta^*)}{\omega_1^2 - \Omega^2}. \quad (2.47)$$

У разі дії зосередженої сили

$$a_1 = \frac{\widehat{P}Y_1(\xi_P)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2(\mu^* \omega_1^2 + \beta^*)^2}}. \quad (2.48)$$

Зручно ввести коефіцієнт динамічності як

$$k_{dyn} = \frac{a_1 p_1^2}{\widehat{P}Y_1(\xi_P)} = \frac{p_1^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2(\mu^* \omega_1^2 + \beta^*)^2}}, \quad (2.49)$$

де  $p_1$  - перша власна частота в класичній моделі Ейлера-Бернуллі.



Для випадку статички ( $\Omega = 0$ )  $k_{dyn} = \left(\frac{p_1}{\omega_1}\right)^2$ , тобто представляє собою відношення

1-ї власної частоти класичної балки Ейлера-Бернуллі до першої власної частоти балки Тимошенко, що є близьким до 1. Саме цим множником  $k_{dyn}$  відрізняється від звичайного визначення динамічного коефіцієнту ( $k_{dyn} = \frac{A_{дин.}}{A_{ст.}} \cdot \left(\frac{p_1}{\omega_1}\right)^2$ ).

Вводячи в (2.48) нові безрозмірні параметри

$$\tilde{\Omega} = \Omega / p_1, \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 / p_1, \quad \tilde{\mu} = \mu^* p_1, \quad \tilde{\beta} = \beta^* / p_1, \quad (2.50)$$

отримаємо

$$k_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\Omega}^2)^2 + \tilde{\Omega}^2 (\tilde{\mu} \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta})^2}}. \quad (2.51)$$

Цей вислів аналогічно звичайній формулі для коефіцієнта динамічності в системі з одним ступенем свободи ( $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 / p_1$  доволі близький до 1, як було зауважено раніше), з заміною коефіцієнта загасання на «ефективний коефіцієнт загасання»  $\tilde{\mu} \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta}$ , що враховує внутрішнє і зовнішнє демпфірування.

#### 2.4.4. Якісне порівняння пружної і в'язкопружної балок

Для вимушених коливань пружної балки без демпферів ( $\tilde{\mu} = \tilde{\beta} = 0$ ,  $\tilde{\omega}_1 = 1$ ) всі  $tg\theta_k$  в формулі (2.38) дорівнюють нулю, і  $\theta_k = 0$ , якщо  $\Omega < \omega_k$  та  $\theta_k = \pi$  за  $\Omega > \omega_k$ . Відповідно  $e^{i\theta_k}$  буде дорівнювати 1 або -1. Формула (2.39) зведеться до

$$Y(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} (\pm a_k) Y_k(\xi), \quad \Psi(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} (\pm a_k) \Psi_k(\xi). \quad (2.52)$$

Це означає, що в формі вимушених коливань всі складові моди, для яких  $\omega_k < \Omega$ , колеблються в фазе с нагрузкой, и все составляющие моды с более высокими частотами ( $\omega_k > \Omega$ ) осцилюють в протифазі з навантаженням. У разі вимушених коливань с функцією часу, наприклад,  $\cos\Omega\tau$ , рішення (2.51) матиме вигляд

$$Y(\xi, \tau) = \cos \Omega \tau \sum_{k=1}^{\infty} (\pm a_k) Y_k(\xi), \quad \Psi(\xi, \tau) = \cos \Omega \tau \sum_{k=1}^{\infty} (\pm a_k) \Psi_k(\xi). \quad (2.53)$$

При цьому змінні розділяються в дійсній формі, отже, це стояча хвиля.

При вимушених коливаннях в'язкопружних балок (з внутрішнім і / або зовнішнім тертям), як видно з наведеного вище рішення (2.38) - (2.40), кожна складова мода має певний фазовий зсув  $\theta_k$  по відношенню до зовнішнього гармонійного навантаження (яке залежить не тільки від ефективного коефіцієнта загасання  $\mu^* \omega_k^2 + \beta^*$ , але також і від  $\omega_k$ ). В дійсній формі, для збуджуючої функції часу  $\cos \Omega \tau$  розв'язок (2.41) матиме вигляд

$$Y(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k Y_k(\xi) \cos(\Omega \tau + \theta_k), \quad \Psi(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Psi_k(\xi) \cos(\Omega \tau + \theta_k).$$

При цьому змінні не розділяються, в силу різних фазових зсувів  $\theta_k$ , за винятком того випадку, коли розглядається одномодове наближення (зауважимо, що в комплексній формі (2.17) змінні розділяються). Це означає, що в загальному випадку форми коливань балки не є подібними в різні моменти часу, тобто вони не є стоячими хвилями. Вигнута вісь балки, що демпфується, включає компоненту рухомої хвилі. Це справедливо для будь-якої моделі балки (Е-Б, Релея, Тимошенко).

Зрозуміло, що рухома складова буде посилюватися із зростанням числа значущих мод і величини фазових зсувів  $\theta_k$ .

## **2.5. Рішення задачі для в'язкопружної балки Тимошенко з демпфером, точковими масами і динамічним гасником коливань.**

### **2.5.1. В'язкопружна балка Тимошенко з демпфером в'язкого тертя**

Нехай маємо балку Тимошенко з демпфером в'язкого тертя в точці  $x_f$ . Тоді зосереджена сила  $P_f$ , прикладена в цій точці, пропорційна швидкості:  $P_f = -g_f \partial y / \partial t$  ( $g_f$  - коефіцієнт в'язкого тертя). У безрозмірних параметрах (2.10) при гармонійних коливаннях (2.28) маємо

$$\hat{P}_f = -i\Omega g_f^* Y(\xi_f), \quad (\hat{P}_f = \frac{P_f}{EA}, \quad g_f^* = \frac{c}{EA} g_f). \quad (2.54)$$

Ця сила може бути врахована в наведеному вище рішенні (2.38) - (2.41) шляхом додавання її до зовнішнього навантаження (тобто зовнішнє навантаження подається як сума заданого навантаження  $q_e(\xi, \tau)$  і сили реакції демпфера). Тоді амплітуда функції навантаження (нормалізована) з урахуванням розкладання (2.30) дорівнює

$$q(\xi) = q_e(\xi) - i\Omega g_f^* Y(\xi_f) \delta(\xi - \xi_f) = q_e(\xi) - i\Omega g_f^* \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi) \delta(\xi - \xi_f). \quad (2.55)$$

Підстановка (2.54) в інтеграл в правій частині (2.36) (при  $m=0$ ) призводить до виразу

$$\int_0^{l/r_0} q(\xi) Y_k(\xi) d\xi = \int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_k(\xi) d\xi - i\Omega g_f^* Y_k(\xi_f) \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi_f). \quad (2.56)$$

Запишемо останній доданок у вигляді:

$$i\Omega g_f^* Y_k(\xi_f) \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi_f) = \sum_{j=1}^{\infty} e_{kj} \zeta_j, \quad (2.57)$$

де

$$e_{kj} = i\Omega g_f^* Y_k(\xi_f) Y_j(\xi_f). \quad (2.58)$$

Система рівнянь (2.36) з урахуванням нормування (2.22) набуде вигляду

$$\zeta_k \left[ (\omega_k^2 - \Omega^2) + i\Omega (\mu^* \omega_k^2 + \beta^*) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} e_{kj} \zeta_j = \int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_k(\xi) d\xi, \quad k=1,2,\dots \quad (2.59)$$

Таким чином, рішення зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2(1+i\mu^*\Omega) - \Omega(\Omega - i\beta^*) + e_{11} & e_{12} & e_{13} & \dots \\ e_{21} & \omega_2^2(1+i\mu^*\Omega) - \Omega(\Omega - i\beta^*) + e_{22} & e_{23} & \dots \\ e_{31} & e_{32} & \omega_3^2(1+i\mu^*\Omega) - \Omega(\Omega - i\beta^*) + e_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

що визначає коефіцієнти  $\zeta_k$  в (2.30) і потім закон коливань (2.28). У разі, коли

зовнішнє навантаження є зосередженою силою, прикладеної в точці  $\xi_p$ , права частина (2.58) відповідно до (2.43) замінюється на  $\widehat{P}Y_k(\xi_p)$ . Тоді система (2.58) приймає вид:

$$\zeta_k \left[ \omega_k^2 - \Omega^2 + i\Omega (\mu^* \omega_k^2 + \beta^*) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} e_{kj} \zeta_j = \widehat{P}Y_k(\xi_p), \quad k=1,2,\dots \quad (2.61)$$

Режим вимушених коливань в комплексній формі визначається виразами (2.30), а загальне рішення для стаціонарних коливань задається за допомогою (2.28).

В одномодовому наближенні (при  $k=1$ ) для довільного навантаження маємо:

$$\zeta_1 = \frac{\int_0^{l/r_0} (q(\xi)Y_1 + m(\xi)\Psi_1) d\xi}{(\omega_1^2 - \Omega^2) + i\Omega(\mu^* \omega_1^2 + \beta^* + g_f^* Y_1^2(\xi_f))}, \quad (2.62, a)$$

і для зосередженої сили:

$$\zeta_1 = \frac{\widehat{P}Y_1(\xi_p)}{(\omega_1^2 - \Omega^2) + i\Omega(\mu^* \omega_1^2 + \beta^* + g_f^* Y_1^2(\xi_f))}. \quad (2.61, b)$$

Або, в показовій формі  $\zeta_1 = a_1 e^{i\theta_1}$ ,

$$a_1 = \frac{\int_0^{l/r_0} (q(\xi)Y_1 + m(\xi)\Psi_1) d\xi}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 (\mu^* \omega_1^2 + \beta^* + g_f^* Y_1^2(\xi_f))^2}}, \quad \text{tg } \theta_1 = -\frac{\Omega(\mu^* \omega_1^2 + \beta^* + g_f^* Y_1^2(\xi_f))}{\omega_1^2 - \Omega^2}. \quad (2.63)$$

### 2.5.2. В'язкопружна балка Тимошенко з динамічним гасником коливань

Розглянемо балку Тимошенко, в деякій точці  $x_d$  якої розташований динамічний гасник коливань масою  $m_a$ . Позначимо через  $y_a(t)$  переміщення маси гасника,  $y_d(t) = y(x_d, t)$  - переміщення точки прикладання гасника до балки. Сила  $P_d$  - сила реакції гасника, що діє на балку і прикладена в точці  $x_d$ , дорівнює силі інерції гасника:

$$P_d = F_a^i = -m_a \frac{d^2 y_a}{dt^2}. \quad (2.64)$$

Переміщення  $y_a(t)$  пов'язане з переміщенням точки прикладання гасника  $y_d(t)$  наступним диференціальним рівнянням:

$$m_a \frac{d^2 y_a}{dt^2} = -k_a (y_a - y_d) - \beta_a \left( \frac{dy_a}{dt} - \frac{dy_d}{dt} \right). \quad (2.65)$$

Тут  $k_a$  та  $\beta_a$  - коефіцієнти жорсткості і в'язкості гасника (в'язке тертя вважаємо пропорційним переміщенню маси щодо точки кріплення). З цього рівняння переміщення  $y_a(t)$  можна виразити через  $y_d(t)$  в наступному вигляді

$$y_a = h_a y_d, \quad (2.66)$$

де  $h_a$  - лінійний оператор (в окремому випадку одночастотних коливань  $h_a$  зводиться до комплексного числа, що має зміст коефіцієнта динамічності гасника, представленого нижче). Тоді сила інерції гасника зводиться до

$$P_d = -m_a h_a \frac{d^2 y_d}{dt^2}. \quad (2.67)$$

У безрозмірних змінних (2.10) рівняння коливань гасника (2.64) набуде вигляду

$$\frac{d^2 Y_a}{d\tau^2} + \omega_a^2 (Y_a - Y_d) + \frac{\beta_a r_0}{m_a c} \left( \frac{dY_a}{d\tau} - \frac{dY_d}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.68)$$

де  $Y = y/r_0$ ,  $\tau = ct/r_0$ ,  $\omega_a = \omega_{0a} \frac{r_0}{c}$ ,  $\omega_{0a} = \sqrt{k_a/m_a}$  - парціальна частота гасника.

Для стаціонарних гармонійних коливань, підставляючи  $Y_d(\tau) = Y_d e^{i\Omega\tau}$  (де  $Y_d \equiv Y(\xi_d)$ ) и  $Y_a(\tau) = Y_a e^{i\Omega\tau}$  в (2.67) отримуємо відношення між амплітудами  $Y_a$  та  $Y_d$  у вигляді:

$$Y_a = h_a Y_d, \quad h_a = \frac{1 + i\beta_a^* \widehat{\Omega}}{1 - \widehat{\Omega}^2 + i\beta_a^* \widehat{\Omega}}, \quad (2.69)$$

де

$$\widehat{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_a}, \quad \beta_a^* = \frac{\beta_a}{m_a \omega_{0a}}. \quad (2.70)$$

Для гармонійних коливань в безрозмірних змінних і параметрах маємо з (2.66):

$$\widehat{P}_d = m_a^* h_a \Omega^2 Y(\xi_d). \quad \left( \widehat{P}_d = \frac{P_d}{EA}, \quad m_a^* = \frac{m_a}{\rho A r_0} \right) \quad (2.71)$$

Тоді ампліудна функція сумарного навантаження (включаючи силу інерції гасника) з урахуванням розкладання (2.30) зводиться до

$$q(\xi) = q_e(\xi) + m_a^* h_a \Omega^2 \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi_d) \delta(\xi - \xi_d). \quad (2.72)$$

Інтеграл в (2.37) дорівнює

$$\int_0^{l/r_0} q(\xi) Y_k(\xi) d\xi = \int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_k(\xi) d\xi + m_a^* h_a \Omega^2 Y_k(\xi_d) \sum_{j=1}^s \zeta_j Y_j(\xi_d). \quad (2.73)$$

Обозначимо

$$f_{kj} = m_a^* h_a \Omega^2 Y_k(\xi_d) Y_j(\xi_d). \quad (2.74)$$

Система рівнянь (2.35) з урахуванням (2.23) набуде вигляду:

$$\zeta_k \left[ \omega_k^2 (1 + i \mu^* \Omega) - \Omega (\Omega - i \beta^*) \right] - \sum_{j=1}^{\infty} f_{kj} \zeta_j = \int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_k(\xi) d\xi, \quad k=1, 2, \dots \quad (2.75, a)$$

Система (2.74) подібна системі (2.58) - її матриця виходить з матриці (2.59) після заміни  $e_{kj}$  (2.57) на  $-f_{kj}$ . У разі, коли зовнішнє навантаження є зосередженою силою, прикладеною в точці  $\xi_p$ , права частина в (2.75) замінюється на  $\widehat{P} Y_k(\xi_p)$ .

Звідси амплітуда в одномодовому наближенні ( $k=1$ ) дорівнює

$$a_1 = \frac{\int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_1(\xi) d\xi}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2 - m_a^* h_a \Omega^2 Y_1^2(\xi_d))^2 + \Omega^2 (\omega_1^2 \mu^* + \beta^*)^2}}. \quad (2.74, б)$$

Коефіцієнт динамічності для випадку одномодового наближення можна ввести наступним чином (використовуючи безрозмірні параметри  $\tilde{\Omega} = \Omega / p_1$ ,  $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 / p_1$ ,  $\tilde{\mu} = \mu^* p_1$ ,  $\tilde{\beta} = \beta^* / p_1$ , див (2.49)):

$$k_{dyn} = \frac{a_1 p_1^2}{\int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_1(\xi) d\xi} = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\Omega}^2 - m_a^* h_a \tilde{\Omega}^2 Y_1^2(\xi_d))^2 + \tilde{\Omega}^2 (\omega_1^2 \tilde{\mu} + \tilde{\beta})^2}}. \quad (2.76)$$

При дії зосередженої сили в одномодовому наближенні коефіцієнт динамічності вводиться як  $k_{dyn} = \frac{a_1 p_1^2}{\tilde{P} Y_1(\xi_P)}$  та визначається (за наявності ДГК) по тій самій формулі (2.775).

### 2.5.3. В'язкопружна балка Тимошенко з точковими масами, демпфером та динамічним гасником коливань

Випадок, коли у деякій точці  $x_M$  розташована точкова маса  $M$ , є окремим випадком балки з ДГК, що розглядалася вище. Сила інерції  $P_M$ , що діє в цій точці -  $P_M = -M \partial^2 y_M / \partial t^2$  ( $y_M = y(x_M)$ ); це відповідає (2.75) з  $h_a = 1$ . Відповідно, достатньо замінити  $f_{kj}$  в системі (2.74) на

$$g_{kj} = M^* \Omega^2 Y_k(\xi_M) Y_j(\xi_M), \quad M^* = \frac{M}{\rho A r_0}. \quad (2.78)$$

В загальному випадку БТ з врахуванням різноманітних прикріплених тіл та пристроїв – мас, демпферів та ДГК – потрібно додати всі індуковані ними сили до зовнішньої навантажки. Тоді прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, подібних до (2.58):

$$\zeta_k \left[ (\omega_k^2 - \Omega^2) + i \Omega (\mu^* \omega_k^2 + \beta^*) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} (e_{kj} - g_{kj} - f_{kj}) \zeta_j = \int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_k(\xi) d\xi, \quad (2.79)$$

де  $e_{kj}$ ,  $f_{kj}$  і  $g_{kj}$  визначаються виразами (2.57), (2.73) та (2.78). Якщо маємо декілька зосереджених навантажень (наприклад декілька зосереджених мас), відповідний доданок у (2.79) потрібно замінити на суму цих навантажень.

В будь-якому випадку, дія зосереджених навантажень, що залежать від руху системи, призводить до спряження різних власних мод (пов'язані системи рівнянь).

Порівнюючи наведений вище розв'язок з розв'язками, що були представлені в літературі раніше, відзначимо, що в монографії Коренева Б. Г., Резнікова Л. М. [26], яка присвячена дослідженням динаміки систем з динамічними гасниками коливань, отримані рішення обмежуються тільки класичною теорією балок. Автори також підкреслюють, що знаходження аналітичного рішення з врахуванням внутрішнього тертя в системі є доволі складним, тому врахування внутрішнього тертя виконується з використанням наближених методів.

В більш пізній роботі [64] Esmailzadeh E., Jalili N. досліджується динаміка коливання балок з динамічними гасниками коливань. В цій роботі використовується модель балки Тимошенко, а рівняння руху отримується з рівняння Лагранжа, однак внутрішнє тертя в матеріалі вводиться не відразу, а за допомогою заміни  $\omega_i^2$  на  $\omega_i^2(1+i\delta)$ , де  $\omega_i$  - власні частоти балки, а  $\delta$  - коефіцієнт внутрішнього тертя. Схожим чином враховується і в'язке тертя в гаснику. Відзначимо, що подібні спрощення призводять до того, що АЧХ, отримані таким чином, є негладкими та характеризуються наявністю різких скачків.

## 2.6. Висновки по розділу 2

1. Отримані диференційні рівняння згинних коливань балки Тимошенко з в'язкопружного матеріалу при дії довільного розподіленого навантаження  $q_0(x,t)$  (в безрозмірних змінних та параметрах). На відміну від класичної моделі балки, динаміка БТ описується системою рівнянь відносно двох незалежних змінних - полного прогину  $y$  та кута повороту перерізу  $\psi$ . Використання моделі Тимошенко дозволяє врахувати зсувні деформації та інерцію обертання, що необхідно при розрахунку широкого класу мостових та баштових конструкцій, а врахування внутрішнього та зовнішнього тертя дозволяє описати резонансну динаміку.



2. При наявності різних прикріплених тіл та пристроїв – точкових мас, демпферів та ДГК - всі індуковані ними сили додаються до зовнішнього навантаження. Таким чином, специфіка задачі полягає в тому, що зовнішнє навантаження включає в себе зосереджені сили, котрі самі істотно залежать від руху системи.

3. Отримано аналітичне рішення задачі о вимушених коливаннях в'язкопружної балки Тимошенко з точковими масами, демпферами та ДГК з використанням розкладу по власним функціям пружної балки Тимошенко без вказаних зосереджених впливів. Задача зведена до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно узагальнених координат – коефіцієнтів вказаного розкладу.

4. Якісне порівняння розв'язків для пружної та в'язкопружної моделей балок показує, що при коливаннях в'язкопружних балок змінні в рівнянні коливань балки не можна розділити (в дійсній формі), на відміну від пружних балок. Це є наслідком того факту, що вимушені коливання реальних балок з внутрішнім тертям не зводяться до стоячих хвиль та включають компоненти рухомої хвилі (як результат різних фазових зсувів  $\theta_k$  для різних складових мод (власних форм)).

## **2.7. Список використаних джерел в розділі 2**

У розділі 2 використані джерела [88, 82, 46, 52, 30, 70, 9-10, 23-24, 26, 64]. Їх найменування представлені у загальному списку використаних джерел.

## РОЗДІЛ 3.

### КОЛИВАННЯ ПРУЖНОЇ ТА В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО БЕЗ ДЕМПФЕРІВ ТА ДИНАМІЧНИХ ГАСНИКІВ КОЛИВАНЬ

В цьому розділі розглянуті вільні та вимушені коливання балки Тимошенко без врахування зосереджених впливів, таких як демпфери в'язкого тертя, точкові маси та динамічні гасники коливань.

В цьому розділі отримані власні частоти та власні форми коливань пружної та в'язкопружної БТ. Для пружної БТ задача про власні коливання розглядалась у багатьох роботах (див., напр., збірник [22], статті [59, 63, 70, 78]); для в'язкопружної БТ – в роботі [88, 82, 12]. Нижче наведений короткий аналіз задачі, необхідний для розуміння динаміки БТ з демпферами та ДГК.

#### 3.1. Вільні коливання пружної БТ. Власні частоти та власні форми.

##### 3.1.1. Основні рівняння.

Як було показано в п. 2.3. для вільних коливань пружної балки Тимошенко характеристичне рівняння для рівняння (2.19) (після підстановки  $Y_j(\xi) = y_j e^{k\xi}$ ,  $\Psi_j(\xi) = \psi_j e^{k\xi}$ ) має вигляд (тут опущений індекс “ $j$ ” в  $\omega_j$ , так само, як і порядкові номери в  $\beta$ ,  $k_{1,2}$ )

$$k^4 + \omega^2(1 + \chi)k^2 + \omega^2(\chi\omega^2 - 1) = 0. \quad (3.1)$$

У випадку, коли  $\chi\omega^2 < 1$  (“низькі частоти”) два корені  $k_{1,2} = \pm\alpha_1$  є дійсними та два  $k_{3,4} = \pm i\alpha_2$  - уявними, де

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega}{2} \left[ \sqrt{\omega^2(1 + \chi)^2 + 4(1 - \chi\omega^2)} \mp \omega(1 + \chi) \right]}. \quad (3.2)$$

У випадку  $\chi\omega^2 > 1$  (“високі частоти”) всі корені є уявними:  $k_{1,2} = \pm i\alpha_3$ ,  $k_{3,4} = \pm i\alpha_2$ , де

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{\omega}{2} \left[ \omega(1 + \chi) - \sqrt{\omega^2(1 + \chi)^2 + 4(1 - \chi\omega^2)} \right]}. \quad (3.3)$$

Розв'язок системи ДР (2.21) при  $\chi\omega^2 < 1$  має вигляд

$$Y_j(\xi) = C_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \xi + C_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \xi + C_3 \cos \alpha_2 \xi + C_4 \sin \alpha_2 \xi, \quad (3.4)$$

$$\Psi_j(\xi) = D_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \xi + D_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \xi + D_3 \cos \alpha_2 \xi + D_4 \sin \alpha_2 \xi.$$

Постійні  $C_m$  і  $D_m$  пов'язані рівняннями (2.21):

$$C_1 = \nu_1 D_2, \quad C_2 = \nu_1 D_1, \quad C_3 = \nu_2 D_4, \quad C_4 = -\nu_2 D_3, \quad (3.5)$$

де

$$\nu_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \chi\omega^2}, \quad \nu_2 = \frac{\alpha_2}{\chi\omega^2 - \alpha_2^2}. \quad (3.6)$$

Чотири невідомі константи, що залишились, визначаємо з граничних умов (2.7) - (2.9). Рішення для випадку  $\chi\omega^2 > 1$  може бути записане аналогічно (воно містить тільки тригонометричні функції та може бути отримане з (3.4) шляхом переходу від гіперболічних функцій до тригонометричних).

Далі розглянемо два випадки ГУ, котрі становлять найбільший інтерес в даній задачі – шарнірно закріплену та консольну балки.

### 3.1.2 Пружна шарнірно закріплена балка

Розглянемо випадок шарнірно закріпленої балки, для якої на обох кряях виконуються граничні умови  $Y = 0, \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = 0$  (2.13).

З граничних умов при  $\xi = 0$  з врахуванням (3.5) отримаємо:

$$\begin{aligned} \nu_1 D_2 + \nu_2 D_4 &= 0, \\ \alpha_1 D_2 + \alpha_2 D_4 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Детермінант даної системи  $\nu_1 \alpha_2 - \alpha_1 \nu_2$ , як це легко показати за допомогою (3.6) та умови  $\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \neq 0$ , не дорівнює нулю, відповідно,  $D_2 = D_4 = 0$ .

З врахуванням цього, ГУ в точці  $\xi = L/r_0$  призводять до рівностей

$$\nu_1 D_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{L}{r_0} - \nu_2 D_3 \sin \alpha_2 \frac{L}{r_0} = 0, \quad (3.8)$$

$$\alpha_1 D_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{L}{r_0} - \alpha_2 D_3 \sin \alpha_2 \frac{L}{r_0} = 0.$$

Умова рівності нулю визначника системи (3.8)

$$\begin{vmatrix} \nu_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{L}{r_0} & -\nu_2 \cos \alpha_2 \frac{L}{r_0} \\ \alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{L}{r_0} & -\alpha_2 \sin \alpha_2 \frac{L}{r_0} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

дає рівняння

$$(\nu_2 \alpha_1 - \alpha_2 \nu_1) \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{L}{r_0} \sin \alpha_2 \frac{L}{r_0} = 0,$$

звідки

$$\sin \alpha_2 \frac{L}{r_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \frac{L}{r_0} = n\pi \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

З врахуванням (3.2) звідси отримаємо рівняння для власних частот:

$$\frac{\omega}{2} \left[ \sqrt{\omega^2 (1 + \chi)^2 + 4(1 - \chi\omega^2)} + \omega(1 + \chi) \right] = \left( \frac{n\pi r_0}{L} \right)^2. \quad (3.11)$$

Це рівняння визначає власні частоти  $\omega_j$  в залежності від параметрів  $L/r_0$  та  $\chi$ .

Воно може бути переписане як біквдратне рівняння відносно  $\omega$ .

Для балки Релея ( $\chi = 0$ ) маємо рівняння:

$$\frac{\omega}{2} \left[ \sqrt{\omega^2 + 4} + \omega \right] = \left( \frac{n\pi r_0}{L} \right)^2, \quad (3.12)$$

котре у випадку, коли  $\omega \ll 1$ , зводиться до виразу для балки Ейлера-Бернуллі

$$\omega = \left( \frac{n\pi r_0}{L} \right)^2.$$

Для кожної з власних частот відповідна власна форма визначається із (3.8).

Відношення визначається з будь-якого рівняння (3.9), наприклад:

$$\frac{D_1}{D_3} = \frac{\nu_2 \sin \alpha_2 \frac{L}{r_0}}{\nu_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{L}{r_0}}. \quad (3.13)$$

З (3.10) випливає, що  $D_1 = 0$ . Тоді рішення (3.4) має вигляд:

$$Y_j(\xi) = -v_2 D_3 \sin \alpha_2 \xi = C \sin \alpha_2 \xi, \quad (3.14)$$

$$\Psi_j(\xi) = D_3 \cos \alpha_2 \xi = -\frac{C}{v_2} \cos \alpha_2 \xi.$$

Тут постійна переобозначена ( $C = -v_2 D_3$ ).

Розглянемо три значення параметра довжини  $L/r_0$ :  $L/r_0=50$ ; 30 і 10, і три значення параметра зсувної піддатливості:  $\chi = 0$  (відповідає моделям балки Релея і балки Ейлера-Бернуллі),  $\chi = 3$  (балка з ізотропного матеріалу з поперечним перерізом, близьким до квадратного) та  $\chi = 10$  (висока зсувна піддатливість або поперечний переріз типу двотавру).

Перша власна частота шарнірно закріпленої пружної балки була отримана з (3.11) (для  $n=1$ ). Значення нормалізованої частоти  $\omega_1/p_1$ , де  $p_1$  - власна частота для моделі Ейлера-Бернуллі, представлені в Таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 - Нормалізована перша власна частота  $\omega_1/p_1$  пружної БТ для трьох значень  $L/r_0$  і  $\chi$  (вплив зсувної піддатливості).

$L/r_0$	$\chi = 0$	$\chi = 3$	$\chi = 10$
50	0.998	0.9922	0.9789
30	0.9946	0.9788	0.9446
10	0.9540	0.8467	0.6924

Зсувна деформація, як і передбачалося, помітно впливає на першу власну частоту досить коротких балок (тут - для  $L/r_0=30$  та більш коротких), для  $L/r_0=10$  знижує значення на 15-30% (в залежності від значення  $\chi$ ).

Три перші нормалізовані власні частоти  $\omega_j$  для пружної балки Тимошенко представлені в Табл. 3.2.

Таблиця 3.2 - Власні частоти  $\omega_j$  для пружної шарнірно закріпленої балки Тимошенко ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ) та балки Релея ( $\chi=0$ ).

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
$\chi=0$	0.0942	0.3343	0.6464
$\chi=3$	0.0842	0.2557	0.4466

Як бачимо з Таблиці 3.2, відмінності між моделями балки Тимошенко і моделлю Релея зростають з ростом номера форми.

### 3.1.3 Пружна консольна балка

Розглянемо тепер консольну балку. З урахуванням (3.5) і граничних умов на затисненому краї ( $Y=0$ ,  $\psi=0$  при  $\xi=0$ ) отримаємо

$$Y_j(\xi) = v_2 D_4 (\cos \alpha_2 \xi - \operatorname{ch} \alpha_1 \xi) - D_3 (v_2 \sin \alpha_2 \xi + v_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \xi), \quad (3.15)$$

$$\Psi_j(\xi) = D_3 (\cos \alpha_2 \xi - \operatorname{ch} \alpha_1 \xi) + D_4 \left( \sin \alpha_2 \xi - \frac{v_2}{v_1} \operatorname{sh} \alpha_1 \xi \right).$$

Граничні умови на вільному кінці ( $\partial \psi / \partial \xi = 0$ ;  $\partial Y / \partial \xi - \psi = 0$  при  $\xi = L/r_0$ ) призводять до системи лінійних однорідних рівнянь для постійних  $D_3$ ,  $D_4$

$$D_3 \left( \alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 L}{r_0} + \alpha_2 \sin \frac{\alpha_2 L}{r_0} \right) + D_4 \left( \frac{v_2}{v_1} \alpha_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 L}{r_0} - \alpha_2 \cos \frac{\alpha_2 L}{r_0} \right) = 0, \quad (3.16, a)$$

$$D_3 \left[ (1 - v_1 \alpha_1) \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 L}{r_0} - (1 + v_2 \alpha_2) \cos \frac{\alpha_2 L}{r_0} \right] + D_4 \left[ \frac{v_2}{v_1} (1 - v_1 \alpha_1) \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 L}{r_0} - (1 + v_2 \alpha_2) \sin \frac{\alpha_2 L}{r_0} \right] = 0. \quad (3.16, б)$$

З умови рівності нулю детермінанта

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 L}{r_0} + \alpha_2 \sin \frac{\alpha_2 L}{r_0} & \frac{v_2}{v_1} \alpha_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 L}{r_0} - \alpha_2 \cos \frac{\alpha_2 L}{r_0} \\ (1 - v_1 \alpha_1) \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 L}{r_0} - (1 + v_2 \alpha_2) \cos \frac{\alpha_2 L}{r_0} & \frac{v_2}{v_1} (1 - v_1 \alpha_1) \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 L}{r_0} - (1 + v_2 \alpha_2) \sin \frac{\alpha_2 L}{r_0} \end{vmatrix} = 0,$$

з врахуванням (3.2) визначаємо нормалізовані власні частоти  $\omega_j$  (в залежності від параметрів  $L/r_0$  та  $\chi$ ). Відношення  $D_3/D_4$  визначаємо з (3.16):

$$\frac{D_3}{D_4} \equiv v_3 = \frac{\alpha_2 \cos \frac{\alpha_2 L}{r_0} - \frac{v_2}{v_1} \alpha_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 L}{r_0}}{\alpha_1 \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 L}{r_0} + \alpha_2 \sin \frac{\alpha_2 L}{r_0}} \quad (3.17)$$

Тоді власні функції можна записати в такий спосіб (тут  $C$  - амплітудний множник)

$$Y_j(\xi) = C \left[ v_2 (\cos \alpha_2 \xi - \operatorname{cosh} \alpha_1 \xi) - v_3 (v_2 \sin \alpha_2 \xi + v_1 \sinh \alpha_1 \xi) \right], \quad (3.18, \text{ а})$$

$$\Psi_j(\xi) = C \left( v_3 (\cos \alpha_2 \xi - \operatorname{ch} \alpha_1 \xi) + \sin \alpha_2 \xi - \frac{v_2}{v_1} \operatorname{sh} \alpha_1 \xi \right). \quad (3.18, \text{ б})$$

Нормуючи власні функції умовою (2.23)  $\int_0^{L/r_0} (Y_j^2 + \Psi_j^2) d\xi = 1$ , отримуємо рівняння для знаходження амплітудного множника:

$$C^2 \int_0^{L/r_0} (Y^2(\xi) + \Psi^2(\xi)) d\xi = 1. \quad (3.19)$$

Разом з повною функцією прогину (3.18, а) знайдемо також функцію згинального прогину  $X_u(\xi)$ , яка визначається шляхом інтегрування функції  $\Psi(\xi)$  (3.18) (похідною від згинального прогину):

$$X_u(\xi) = C \left( -v_3 \left( \frac{1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 \xi + \frac{1}{\alpha_1} \operatorname{sh} \alpha_1 \xi \right) + \frac{1}{\alpha_2} \cos \alpha_2 \xi - \frac{v_2}{\alpha_1 v_1} \operatorname{ch} \alpha_1 \xi \right) + C_0. \quad (3.20)$$

Постійна  $C_0$  визначається з граничної умови - рівності нулю згинального прогину при  $\xi = 0$ :

$$C_0 = C \left( \frac{1}{\alpha_2} - \frac{v_2}{\alpha_1 v_1} \right). \quad (3.21)$$

Були виконані розрахунки власних частот і власних форм та порівняні з наявними в літературі рішеннями [52]. Наведене вище рішення визначає

безрозмірні частоти  $\omega$  (у часі  $\tau$ ), які пов'язані з розмірними частотами  $\omega_0$  співвідношенням

$$\omega_0 = \omega \frac{c}{r_0}. \quad (3.22)$$

В [52] також наведені значення безрозмірного параметра  $kL$ , де  $k = \sqrt[4]{\frac{\omega_0^2 \rho A}{EJ}}$ .

Підставляючи сюди вираз для  $\omega_0$  (3.22), отримуємо

$$kL = \frac{L}{r_0} \sqrt{\omega}. \quad (3.23)$$

За цією формулою проводився перерахунок від параметра  $\omega$  до параметру  $kL$ . В таблиці 3.3 наведені значення  $kL$  при  $L/r_0 = 10$  для трьох перших власних форм для класичної балки Ейлера-Бернуллі, взяті з [52], і для балки Тимошенко в даному розрахунку, при трьох значеннях параметра сдвигової піддатливості  $\chi = 0, 3$  та  $10$ .

Таблиця 3.3 - Порівняння трьох безрозмірних параметрів власних частот для консольної балки при  $L/r_0 = 10$  в класичній моделі і моделі Тимошенко при  $\chi = 0, 3$  та  $10$  (вплив зсувної піддатливості).

	$k_1L$	$k_2L$	$k_3L$
Балка Ейлера-Бернуллі	1.875	4.694	7.855
Балка Релея ( $\chi = 0$ )	1.854	4.374	6.818
Балка Тимошенко $\chi = 3$	1.798	3.82	5.642
Балка Тимошенко $\chi = 10$	1.692	3.237	4.633

Порівняння нормалізованих власних частот в моделях Релея ( $\chi = 0$ ) і Тимошенко (для  $\chi = 3$ ) представлено в Табл. 3.4.

З таблиці 3.4 бачимо, що для 1-ї власної форми значення власних частот балки Релея (балки Тимошенко при  $\chi = 0$ ) і балки Е-Б практично збігаються (різниця



становить  $\approx 1\%$ ), для моделі балки Тимошенко при  $\chi = 3$  і  $\chi = 10$  розбіжності стають більш суттєвими ( $\approx 4\%$  і  $\approx 10\%$  відповідно). Для власних форм вищих порядків (2-й і 3-й) вже з'являються помітні відмінності між балками Е-Б і Релея (близько 7% для другої форми і  $\approx 12\%$  - для третьої), а між балками Тимошенко и Е-Б розходження в частотах становлять вже  $\approx 19\%$  і  $\approx 31\%$  при  $\chi = 3$  та  $\chi = 10$ , відповідно, для 2-ї власної частоти, і  $\approx 28\%$  -  $\approx 41\%$  - для 3-ї власної частоти).

Таблиця 3.4 - Вплив зсувної податливості на власні частоти пружної консольної балки ( $L/r_0 = 10$ ).

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
$\chi = 0$	0.0344	0.1913	0.4649
$\chi = 3$	0.0323	0.1459	0.3183

Цікавим є порівняння власних форм коливань консольної балки в моделях Тимошенко і Релея (тобто при  $\chi = 0$ ).

Перші три власні форми БТ показані на Рис. 3.1, *a*, *b*, *c*, відповідно, третя форма для балки Релея – на Рис. 3.1, *d*.

Як можна побачити з Рис. 3.1, на відміну від класичної моделі балки Ейлера – Бернуллі, кут повороту осі в місці жорсткого закріплення не дорівнює 0 в моделі балки Тимошенко, що пояснюється врахуванням зсуву в поперечному перерізі балки.

Тож, з Рис. 3.1, можна зробити висновок, що самі власні форми коливань в обох моделях близькі (відзначаються лише малі кількісні відмінності поблизу місця закріплення), відмінності в значеннях власних частот є більш помітними (див. Таблиця 3.4), що корелюється з результатами, отриманими для випадку шарнірно закріпленої балки (Таблиця 3.2).

На відміну від класичної моделі балки і моделі Релея, для балки Тимошенко потрібно розрізняти повний прогин і згинальний прогин (а також їх різницю - зсувний прогин).

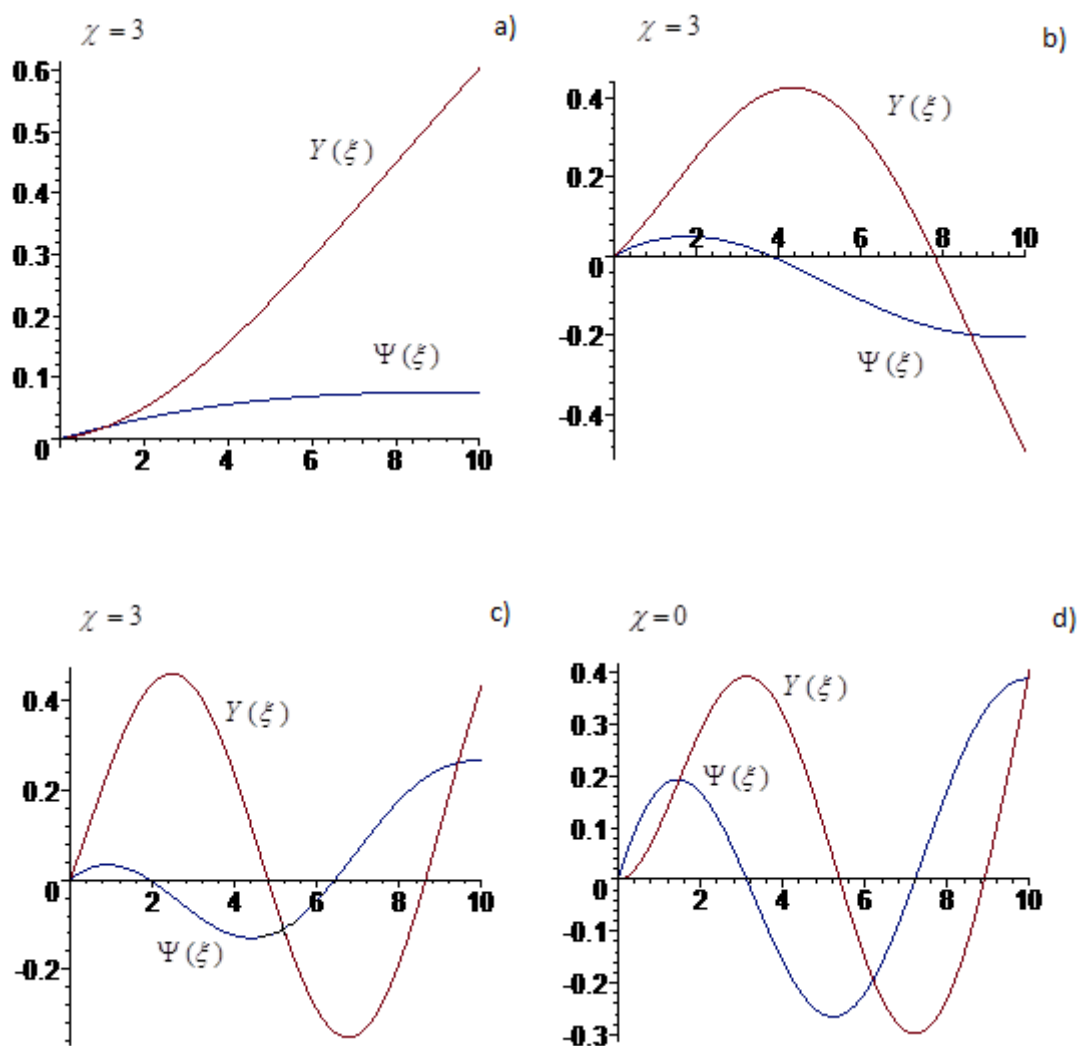


Рисунок 3.1 – Власні форми  $Y(\xi)$  та  $\Psi(\xi)$  пружної консольної БТ ( $L/r_0 = 10$ ) а) 1-а мода; б) 2-а мода; в) 3-я мода д) 3-я мода при  $\chi = 0$

Власні форми коливань балки в різних моделях для  $L/r_0 = 10$  і згинні складові (3.20) в моделі Тимошенко при різних значеннях  $\chi$  показані на Рис. 3.2 (перша і третя форми). З Рис. 3.2, а, бачимо, що врахування зсувної піддатливості призводить до «випрямлення» власної форми вже для першої форми коливань. Зсувна складова (різниця між повним і згинальним прогином) відносно мала у випадку  $\chi = 3$  та істотна для  $\chi = 10$ . В останньому випадку повний кут нахилу в точці  $\xi = 0$  помітно відрізняється від нуля. Хоча згинальна складова зі зростанням  $\chi$  зменшується, але все ж вносить основний вклад в повний прогин балки.

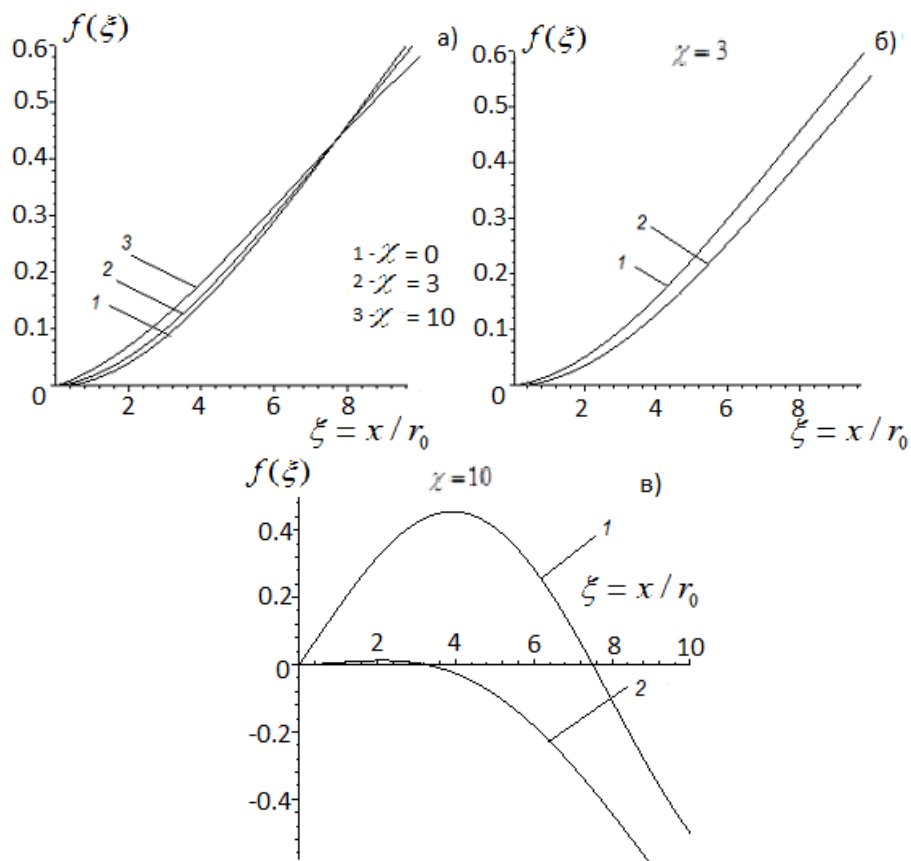


Рисунок 3.2 – (а) - перша власна форма в моделях Релея ( $\chi = 0$ ) і Тимошенко ( $\chi = 3$  і  $\chi = 10$ ); (б) та (в) - повний прогин (1) і згина складова (2) в першій власній формі при  $\chi = 3$  і в третій власній формі при  $\chi = 10$ , відповідно

Для вищих власних форм коливань розбіжності між згинальним і повним прогином стають значними - з ростом  $\chi$  зменшується згинальна складова прогину і зростає зсувна складова, яка стає домінуючою.

### 3.2. Вільні коливання в'язкопружної балки Тимошенко

Розглянемо тепер вільні коливання БТ з урахуванням в'язкого тертя - зовнішнього і внутрішнього в припущенні ( $\beta_1^* = \beta_2^* = \beta$ ). Із рівнянь (2.6) маємо для вільних коливань в'язкопружної БТ ( $q = 0$ ,  $m = 0$ ):

$$\left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) - \chi \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} - \beta \chi \frac{\partial Y}{\partial \tau} = 0, \quad (3.24, a)$$

$$-\chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \psi \right) + \chi \left(1 + \mu^* \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \beta \chi \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0. \quad (3.24, b)$$

Розв'язок системи (3.) шукаємо у вигляді

$$Y(\xi, \tau) = e^{i\tilde{\omega}\tau} \tilde{Y}(\xi), \quad \psi(\xi, \tau) = e^{i\tilde{\omega}\tau} \tilde{\Psi}(\xi), \quad (3.25)$$

де хвилею зверху позначені величини, що відносяться до в'язкопружної балки (на відміну від аналогічних величин для пружної балки). Система (3.24) після підстановки (3.25) зводиться до системи ОДУ з комплексними коефіцієнтами щодо функцій  $\tilde{Y}(\xi)$  та  $\tilde{\Psi}(\xi)$ :

$$(1 + i\mu^* \tilde{\omega}) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\tilde{Y}}{d\xi} - \tilde{\Psi} \right) + \chi \tilde{\omega}^2 \tilde{Y} - i \chi \beta \tilde{\omega} \tilde{Y} = 0, \quad (3.26, \text{а})$$

$$(1 + i\mu^* \tilde{\omega}) \left( \frac{d\tilde{Y}}{d\xi} - \tilde{\Psi} \right) + \chi (1 + i\mu^* \tilde{\omega}) \frac{d^2 \tilde{\Psi}}{d\xi^2} + \chi \tilde{\omega}^2 \tilde{\Psi} - i \chi \beta \tilde{\omega} \tilde{\Psi} = 0. \quad (3.26, \text{б})$$

Розкладемо шукані функції  $\tilde{Y}(\xi)$  та  $\tilde{\Psi}(\xi)$  в ряди за власними функціями пружної БТ  $Y_j$ ,  $\Psi_j$  (т. ч., ми шукаємо рішення у вигляді суперпозиції векторних власних форм  $Z(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Z_j(\xi)$ ):

$$\tilde{Y}(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi), \quad \tilde{\Psi}(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \Psi_j(\xi), \quad (3.27)$$

і підставляємо в рівняння (3.26). Отримаємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left[ (1 + i\mu^* \tilde{\omega}) \frac{d}{d\xi} \left( \frac{dY_j}{d\xi} - \Psi_j \right) + \chi \tilde{\omega} (\tilde{\omega} - i \beta) Y_j \right] = 0, \quad (3.28, \text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left[ (1 + i\mu^* \tilde{\omega}) \frac{d}{d\xi} \left( Y_j + \chi \frac{d\Psi_j}{d\xi} \right) + (\tilde{\omega}^2 \chi - 1 - i\mu^* \tilde{\omega} - i \chi \beta \tilde{\omega}) \Psi_j \right] = 0. \quad (3.28, \text{б})$$

Так як для власних форм  $(Y_j, \Psi_j)$  виконується система рівнянь (2.21) ( $\omega_j$ -власні частоти пружної БТ), система (3.28) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left[ \omega_j^2 - \tilde{\omega}^2 + i \tilde{\omega} (\mu^* \omega_j^2 + \beta) \right] Y_j = 0, \quad (3.29, \text{а})$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left[ \omega_j^2 - \tilde{\omega}^2 + i \tilde{\omega} (\mu^* \omega_j^2 + \beta) \right] \Psi_j = 0. \quad (3.29, \text{б})$$

Помножимо (3.29, а) на  $Y_k(\xi)$  і (3.29, б) на  $\Psi_k(\xi)$ , проінтегруємо отримані рівності по довжині балки і складемо обидва рівняння. З огляду на умови ортогональності (2.22), отримаємо

$$\tilde{\omega}^2 - i\tilde{\omega}(\mu^* \omega_k^2 + \beta) - \omega_k^2 = 0, \quad (k=1,2,\dots) \quad (3.30)$$

(тот факт, що рівняння (3.30) є достатніми для виконання системи рівнянь (3.29), є очевидним і без умов ортогональності, але ці умови доводять необхідність рівнянь (3.30)).

Звідси отримуємо зв'язок між спектрами власних частот в'язкопружної БТ з в'язким тертям і пружної БТ:

$$\tilde{\omega} = \frac{i}{2}(\mu^* \omega_k^2 + \beta) \mp \sqrt{\omega_k^2 - \frac{1}{4}(\mu^* \omega_k^2 + \beta)^2},$$

або

$$\tilde{\omega}_k = \pm \alpha_k + i\gamma_k, \quad \alpha_k = \sqrt{\omega_k^2 - \frac{1}{4}(\mu^* \omega_k^2 + \beta)^2}, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(\mu^* \omega_k^2 + \beta). \quad (3.31)$$

Із (3.27) отримаємо частотні рішення (для кожної пари коренів) в комплексній формі

$$\tilde{Y}(\xi, \tau) = e^{i(\pm\alpha_k + i\gamma_k)\tau} \tilde{Y}_k(\xi) = e^{-\gamma_k \tau} e^{\pm i\alpha_k \tau} \tilde{Y}_k(\xi), \quad \tilde{\psi}(\xi, \tau) = e^{-\gamma_k \tau} e^{\pm i\alpha_k \tau} \tilde{\Psi}_k(\xi), \quad (3.32, a)$$

або в дійсній формі:

$$\tilde{Y}_k^{(1,2)}(\xi, \tau) = e^{-\gamma_k \tau} \begin{pmatrix} \cos \alpha_k \tau \\ \sin \alpha_k \tau \end{pmatrix} \tilde{Y}_k(\xi), \quad \tilde{\psi}_k^{(1,2)}(\xi, \tau) = e^{-\gamma_k \tau} \begin{pmatrix} \cos \alpha_k \tau \\ \sin \alpha_k \tau \end{pmatrix} \tilde{\Psi}_k(\xi). \quad (3.32, б)$$

Дійсна частина комплексної частоти  $\alpha_k$  визначає циклічну частоту коливань, уявна частина - загасання. У випадку  $\beta=0$  формули (3.31) зводяться до отриманих в роботі [82] (Маневич, Колаковський, 2012) для випадку шарнірно закріплених балки без урахування зовнішнього тертя.

Представлений тут висновок (3.31) показує, що кожна власна частота в'язкопружної БТ з в'язким зовнішнім тертям пов'язана з відповідною власною частотою пружної БТ формулами (3.31), незалежно від граничних умов.

### 3.3. Вимушені коливання балки Тимошенко без урахування внутрішнього і зовнішнього тертя

Розглянемо спочатку вимушені коливання пружної БТ (без зовнішнього тертя). Потрібно відзначити, що в цьому випадку всі  $tg\theta_k$  в формулах (2.37)

обертаються в нуль, значить  $\theta_k$  дорівнюють нулю або  $\pi$  в залежності від того, чи буде  $\Omega < \omega_k$  або  $\Omega > \omega_k$ . Відповідно  $e^{i\theta_k}$  дорівнює 1 або -1. Формули (2.39) зводяться до:

$$Y(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} (\pm a_k) Y_k(\xi), \quad \Psi(\xi, \tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} (\pm a_k) \Psi_k(\xi).$$

У формі коливань всі складові її моди, для яких  $\omega_k > \Omega$ , коливаються в фазі з силою, а всі моди з більш низькими власними частотами ( $\omega_k < \Omega$ ) коливаються в протифазі з силою.

Розглянемо результати розрахунку для консольної балки  $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ . Значення трьох перших нормалізованих власних частот для цієї балки наведені в розділі 3 в Таблиці 3.1 ( $\omega_1 = 0.0323$ ,  $\omega_2 = 0.1459$ ,  $\omega_3 = 0.3183$ ). Зосереджена сила  $P$  прикладалася на краю консолі (в точці  $\xi_p = L/r_0$ ) або посередині прогону ( $\xi_p = L/2r_0$ ). Розглядалися різні частоти сили, менші і більші першої власної частоти.

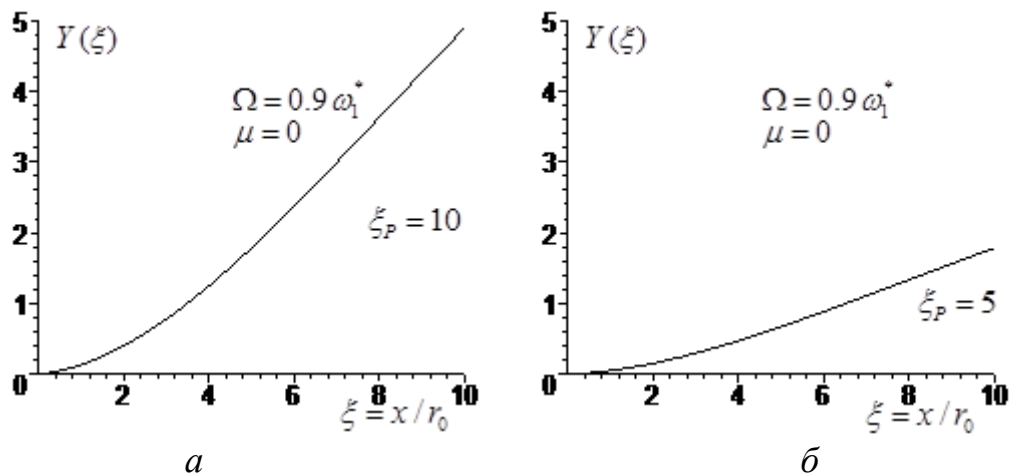


Рисунок 3.3 - Форма вимушених коливань пружної консольної балки  $Y(\xi)$  для БТ в трьохмодовому наближенні ( $\chi = 3$ ,  $L/r_0 = 10$ ,  $\Omega = 0.0291$ ); а) сила  $P$  – на краї балки; б) сила посередині балки

На Рис. 3.3, а і б, наведені форми вимушених коливань (функції прогину  $Y(\xi)$ ) пружної балки Тимошенко для  $\hat{P} = 1$  при частоті зовнішньої сили  $\Omega = 0.0291$  (т. ч.  $\Omega = 0.9\omega_1^*$ ), відповідно для сили на краї балки ( $\xi_p = L/r_0 = 10$ ) (а) и посередині (

$\xi_p = L/(2r_0) = 5$  ( б), при врахуванні трьох мод в розкладанні прогину.

Ці форми практично збігаються (при відповідному нормуванні) з першою власною формою, і помітних відмінностей між класичною моделлю і БТ немає.

При переміщенні сили уздовж балки від краю до точки закріплення амплітуда вимушених коливань зменшується.

При частоті збудження  $\Omega = 0.097$ , що втричі перевищує першу власну частоту (в.ч.), але меншу другої в.ч., одномодове наближення стає непридатним (Рис. 3.4).

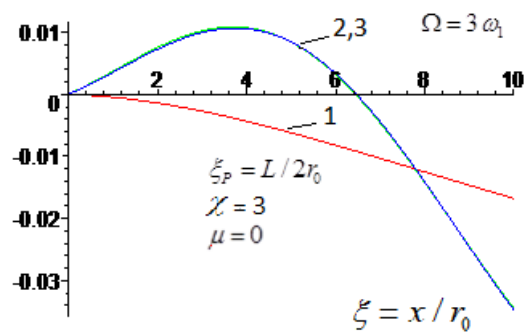


Рисунок 3.4 - Форма вимушених коливань  $Y(\xi)$  пружної БТ ( $L/r_0 = 10$ ) при нормалізованій частоті  $\Omega = 0.097$  (сила посередині прольоту, в одномодовому (1), двомодовому (2) та трьохмодовому наближеннях (3))

Врахування другої форми стає принципово важливим, але компонента по третій власній формі залишається дуже малою.

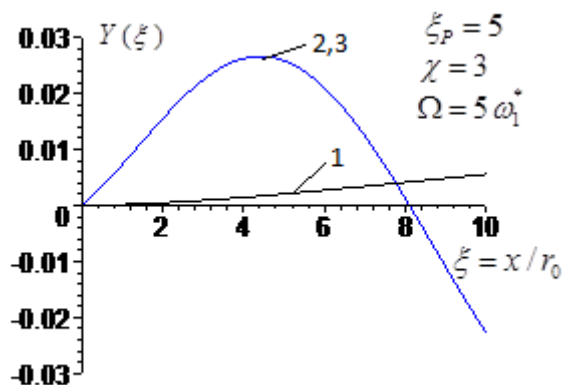


Рисунок 3.5 - Форма вимушених коливань  $Y(\xi)$  пружної БТ ( $L/r_0 = 10$ ) при частоті  $\Omega = 0.1616$  (сила посередині прольоту, в одномодовому (1), двомодовому (2) і трьохмодовому наближеннях (3))

При частоті збудження  $\Omega = 0.1616$ , що в п'ять разів перевищує першу власну частоту (але все ще є меншою за третю в.ч., Рис. 3.5), компонента по першій формі стає малою, і в формі коливань домінує компонента по другій власній формі.

Наведемо коефіцієнти  $\zeta_j$  (2.36), (2.44) в розкладанні динамічного прогину за власними формами пружної балки Тимошенко (для  $\chi = 3$ ) і балки Релея ( $\chi = 0$ ) (в загальному випадку коефіцієнти (2.36) є комплексними величинами, але для пружної балки ( $\mu^* = 0$ ,  $\beta = 0$ ) коефіцієнти  $\zeta_k$  - є дійсними).

Таблиця. 3.4 – Коефіцієнти  $\zeta_k$  в розкладанні прогину (2.30) при різних точках  $\xi_p$  прикладання сили  $P$  і для різних частот збудження  $\Omega$ , при  $\chi = 0$  та  $\chi = 3$ .

$\chi$	$\xi_p$	$\Omega$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$
$\chi = 0$	$L/r_0$	$0.9\omega_1 = 0.0309$	3.2570	-0.0174	0.0022
$\chi = 3$	$L/r_0$	$0.9\omega_1 = 0.0309$	8.0781	-0.0287	0.0051
$\chi = 0$	$7L/10r_0$	$0.9\omega_1 = 0.0309$	1.9183	0.0069	-0.0016
$\chi = 3$	$7L/10r_0$	$0.9\omega_1 = 0.0309$	4.9711	0.0092	-0.0041
$\chi = 0$	$L/2r_0$	$0.9\omega_1 = 0.0309$	1.0994	0.0134	0.0006
$\chi = 3$	$L/2r_0$	$0.9\omega_1 = 0.0309$	2.9786	0.0237	-0.0007
$\chi = 0$	$L/2r_0$	$3\omega_1 = 0.1031$	-0.0261	0.0183	0.0006
$\chi = 3$	$L/2r_0$	$3\omega_1 = 0.1031$	-0.0274	0.0452	-0.0007
$\chi = 0$	$L/2r_0$	$5\omega_1 = 0.1719$	-0.0087	0.0674	0.0006
$\chi = 3$	$L/2r_0$	$5\omega_1 = 0.1719$	-0.0092	-0.0585	-0.0009
$\chi = 0$	$L/2r_0$	$15\omega_1 = 0.5205$	-0.0009	-0.0021	-0.0024
$\chi = 3$	$L/2r_0$	$15\omega_1 = 0.5205$	-0.0009	-0.0020	0.0004

З таблиці 3.4 видно, що при малих частотах збудження ( $\Omega < \omega_1^*$ ) в формі вимушених коливань домінує перша власна форма, внеском інших форм можна знехтувати (незалежно від точки прикладання сили). У випадку  $\Omega > \omega_1^*$  (але  $\Omega < \omega_2^*$ ) зростає компонента прогину по другій формі, але третя форма майже не



проявляється навіть при частоті  $\Omega = 5\omega_1$ . Одночасно при збільшенні частоти зростають розбіжності між балкою Тимошенко і класичною моделлю.

Таким чином, в дорезонансній зоні провідною є перша гармоніка, відповідно можна обмежитися лише першим доданком в розкладанні прогину. Тут коефіцієнт зсувної податливості істотно не впливає на результат, за винятком коротких балок. При частотах, що не перевищують помітно третю власну частоту, можна вважати достатнім трьохмодове наближення. У зарезонансній зоні, як правило, вплив коефіцієнта зсувної податливості істотно більше, і тут неприйнятні класична модель і модель Релея.

### 3.4. Вимушені коливання балки Тимошенко з урахуванням внутрішнього і зовнішнього тертя.

Перейдемо до вимушених коливань з урахуванням внутрішнього і зовнішнього тертя. Розглянемо спочатку випадок, коли можна обмежитися одномодовим наближенням. Тоді рішення (2.38), (2.44) зводиться до

$$Y(\xi, \tau) = a_1 e^{i(\Omega\tau + \theta_1)} Y_1(\xi), \quad \Psi(\xi, \tau) = a_1 e^{i(\Omega\tau + \theta_1)} \Psi_1(\xi), \quad (3.33)$$

де

$$a_1 = \frac{\hat{P}Y_1(\xi_p)}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2(\mu^* \omega_1^2 + \beta)^2}}, \quad \text{tg } \theta_1 = -\frac{\Omega(\mu^* \omega_1^2 + \beta)}{\omega_1^2 - \Omega^2}.$$

Коефіцієнт динамічності вводиться аналогічно (2.48). З урахуванням безрозмірних параметрів (2.49) він має вигляд (2.50):

$$k_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\Omega}^2)^2 + \tilde{\Omega}^2(\tilde{\mu} \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta})^2}}. \quad (3.34)$$

Власні частоти в'язкопружної балки Тимошенко  $L/r_0 = 10$  при різних значеннях коефіцієнта в'язкого тертя  $\mu^*$  і коефіцієнта зсувної податливості наведені в Таблиці 3.5.

Як видно з Таблиці 3.5, розв'язки є комплексними і залежать від параметра  $\tilde{\mu}$ . Зі зростанням  $\tilde{\mu}$  дійсна частина першої власної частоти практично не змінюється, а уявна частина зростає майже лінійно. Для другої власної частоти

спостерігаємо зменшення дійсної частини з ростом  $\tilde{\mu}$  і зростання уявної частини.

Таблиця 3.5. Перша власна частота  $\tilde{\omega}_1$  в'язкопружної балки Тимошенко ( $L/r_0 = 10$ ) при різних  $\chi$ .

$\tilde{\mu} = 0.01$				
	$\chi = 0$	$\chi = 3$	$\chi = 7$	$\chi = 10$
$\tilde{\omega}_1$	0.03437+ i 0.00001	0.03233+ i 0.00001; 0.57033+ i 0.00163	0.03007+ i 0.00000; 0.37463+ i 0.00070	0.02863+ i 0.00000; 0.31656+ i 0.00050
$\tilde{\mu} = 0.05$				
$\tilde{\omega}_1$	0.03437+ i 0.00003	0.03233+ i 0.00003; 0.57028+ i 0.00813	0.03007+ i 0.00002; 0.37461+ i 0.00351	0.02863+ i 0.00002; 0.31655+ i 0.00251
$\tilde{\mu} = 0.2$				
$\tilde{\omega}_1$	0.03437+ i 0.00012	0.03233+ i 0.00010; 0.56941+ i 0.03253	0.03007+ i 0.00009; 0.37437+ i 0.01403	0.02863+ i 0.00008; 0.31640+ i 0.01002

На Рис. 3.6, *a-b*, показані амплітудно-частотні характеристики в координатах  $\Omega_\tau / p_1 - k_{dyn}$  для двох значень відносної довжини балки  $L/r_0$  та двох значень параметра зсувної піддатливості. На Рис. 3.6, *a*, АЧХ наведені для в'язкопружної балки при  $\chi = 0$  для двох довжин:  $L/r_0 = 10$  і  $L/r_0 = 50$  ( $\tilde{\mu} = 0.1$ ). Для обраних нормалізованих параметрів АЧХ при різних  $L/r_0$  практично збігаються (вони збігаються точно в класичній моделі Ейлера-Бернуллі; невелике розходження тут пояснюється тим фактом, що при  $\chi = 0$  ми маємо справу з моделлю Релея, яка враховує інерцію обертання).

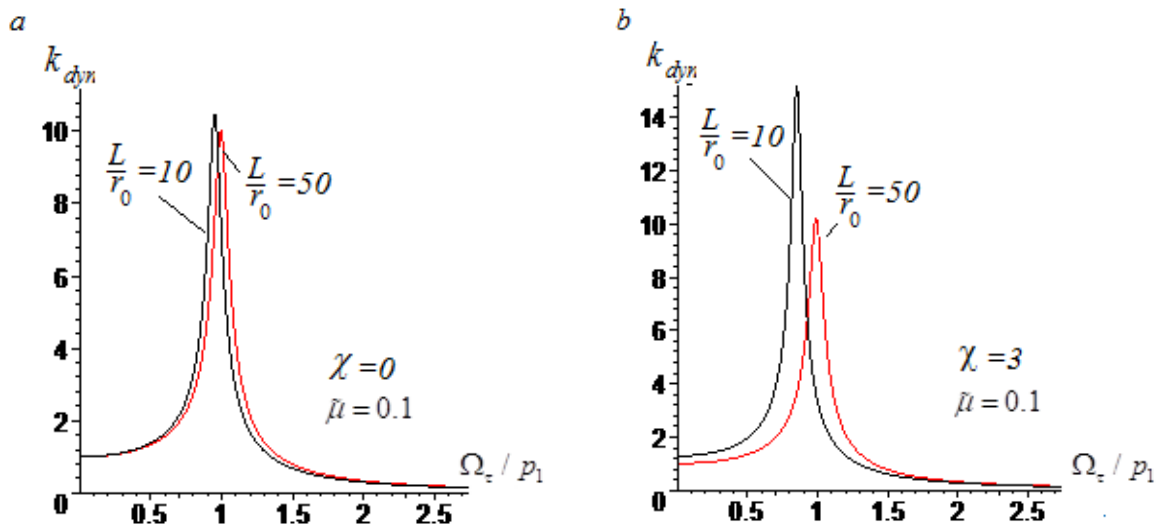


Рисунок 3.6 - АЧХ в'язкопружної балки Тимошенко ( $L/r_0=10$  і  $50$ );

(a)  $\chi = 0$ ; (b)  $\chi = 3$

На Рис. 3.6, *b*, наведені подібні графіки для  $\chi = 3$ . Тут відмінності стають очевидними, так як вплив параметра  $\chi$  істотно залежить від параметра довжини  $L/r_0$  (параметр  $\chi$  має більший вплив, ніж інерція обертання). Далі більш детально розглянемо залежності між зсувною піддатливістю і відносною довжиною балки.

*Вплив зсувної піддатливості балки і її відносної довжини.*

Нижче представлені амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) балки для випадку, коли сила діє в перерізі ( $\xi_p = L/r_0$ ), криві побудовані для коефіцієнта динамічності в вигляді (3.34) при різних значеннях параметрів  $L/r_0$ ,  $\chi$ ,  $\tilde{\beta}$ . Приймались значення  $L/r_0$ , рівні відповідно 50, 30, 10, 5, щоб охопити діапазон балок від великих довжин до відносно коротких балок. для параметра  $\chi$  приймалися такі три значення:  $\chi = 0$  (що відповідає класичній моделі Ейлера-Бернуллі, що не враховує зсув в поперечному перерізі);  $\chi = 3$  (приблизне значення  $\chi$  для балок прямокутного поперечного перерізу з ізотропного матеріалу);  $\chi = 10$  (для матеріалів з підвищеною піддатливістю на зсув).

На Рис. 3.7 побудовані амплітудно-частотні характеристики для балки і

демпфера з нормалізованими коефіцієнтами в'язкого тертя  $\tilde{\beta} = \mu^* \omega_1^2 + \beta^* = 0.1$ , для чотирьох значень відносної довжини  $L/r_0$  (відповідно графіки а – г).

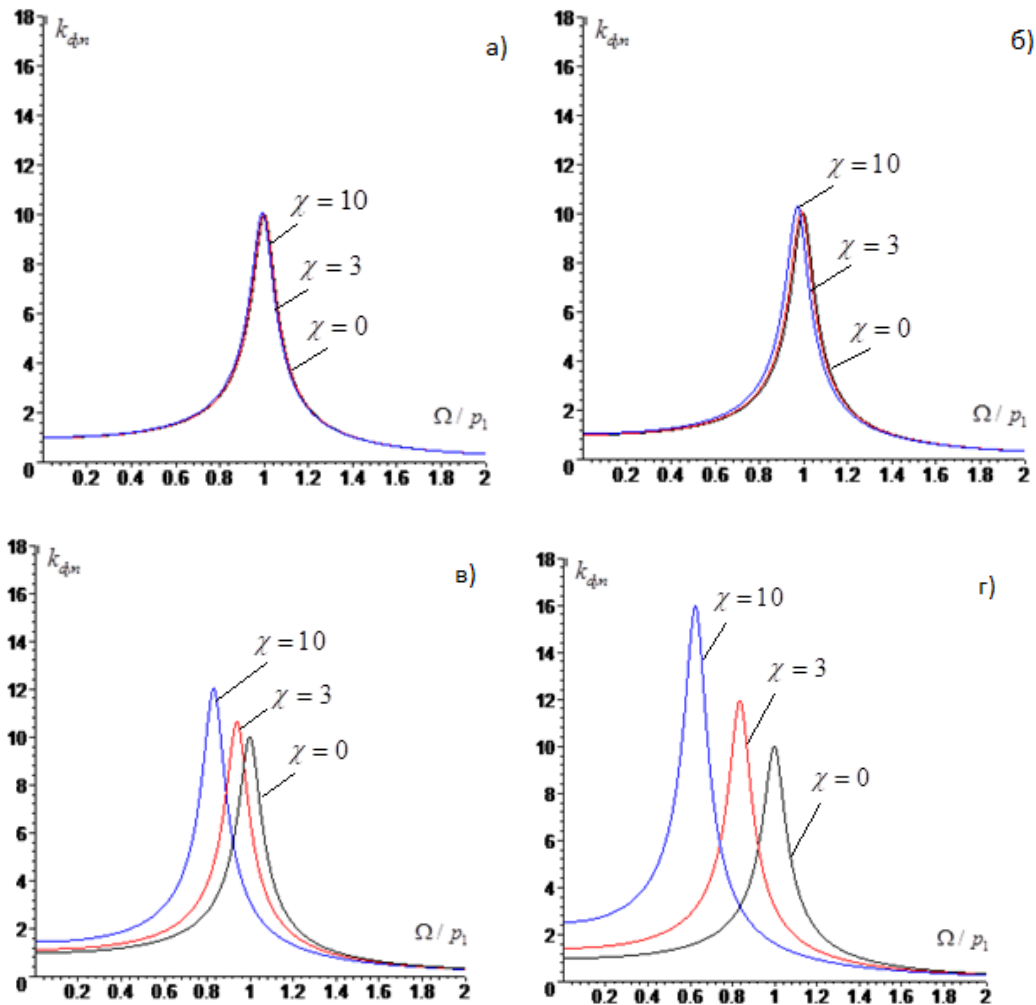


Рисунок 3.7 – Амплітудно-частотні характеристики шарнірно закріпленої балки

Тимошенко при  $\tilde{\beta} = 0.1$ , для різних значень  $L/r_0$

а)  $L/r_0 = 50$ , б)  $L/r_0 = 30$ , в)  $L/r_0 = 10$ , г)  $L/r_0 = 5$

Зі зменшенням відносної довжини балки відмінності між кривими для моделі Е-Б і моделі Тимошенко стають все більш вираженими, пікові амплітуди зростають, а абсциса максимуму зміщується вліво, тобто в сторону менших частот.

Розглянемо далі в трьохмодовому наближенні форми коливань  $Y(\xi)$  балки Тимошенко для наступних параметрів балки:  $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\tilde{\beta} = 0.1$ ,  $\tilde{\mu} = 0.1$ ,

зосереджена сила має частоту  $\tilde{\Omega}$  і прикладена в точках  $\xi_p = L/2r_0$ ,  $\xi_p = L/r_0$  або  $\xi_p = 7L/10r_0$ . Значення коефіцієнтів  $\zeta_k$  в розкладанні прогину (2.30) наведено в Таблиці. 3.6.

Таблиця. 3.6 – Коефіцієнти  $\zeta_k$  в розкладанні прогину (2.39) при  $\chi = 3$  для різних частот збудження і розташувань сили.

$\Omega/\omega_1$	$0.1\xi_p$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$
0.9	1	$1.3124 - 2.9798 i$	$-0.0284 + 0.0028 i$	$0.0051 - 0.0005 i$
	0.7	$0.8076 - 1.8337 i$	$0.0091 - 0.0009 i$	$-0.0040 + 0.0004 i$
	0.5	$0.4839 - 1.0987 i$	$0.0234 - 0.0023 i$	$-0.0007 + 0.0001 i$
2.5	1	$-0.1116 - 0.0098 i$	$-0.0361 + 0.0146 i$	$0.0051 - 0.0014 i$
	0.7	$-0.0687 - 0.0060 i$	$0.0116 - 0.0047 i$	$-0.0040 + 0.0011 i$
	0.5	$-0.0412 - 0.0036 i$	$0.0298 - 0.0120 i$	$-0.0007 + 0.0002 i$
5.0	1	$-0.0250 - 0.0010 i$	$0.0248 + 0.0338 i$	$0.0047 - 0.0034 i$
	0.7	$-0.0154 - 0.0006 i$	$-0.0080 - 0.0109 i$	$-0.0038 + 0.0027 i$
	0.5	$-0.0092 - 0.0004 i$	$-0.0204 - 0.0279 i$	$-0.0006 + 0.0004 i$

З Таблиці 3.6 видно, що при малих частотах збудження ( $\Omega < \omega_1^*$ ) внесок від першої власної форми пружної БТ є найбільш вагомим, друга форма і третя форми проявляються відносно слабо. В разі  $\Omega > \omega_1^*$  (но  $\Omega < \omega_2^*$ ) зростає компонента прогину по другій формі, при  $\Omega > \omega_2^*$  вона стає провідною; значення коефіцієнтів істотно залежить і від точки прикладання сили.

На Рис. 3.8 показані форми коливань в'язкопружної балки Тимошенко в різні моменти часу. У випадку (а) сила прикладена посередині прольоту  $\xi_p = L/2r_0$ , частота зовнішньої сили  $\tilde{\Omega}$  в 2.5 рази перевищує першу власну частоту. Для (б) – (в) сила прикладена в точці  $\xi_p = 7L/10r_0$ , а частота зовнішньої сили задається рівною  $\tilde{\Omega} = 2.5$  і  $\tilde{\Omega} = 5$  відповідно.

На Рис. 3.8 криві форм коливань 1-8 наведені з кроком по нормалізованому часу  $\pi/4$  в діапазоні від 0 до  $2\pi$ . Як бачимо з графіків (а) - (в), у всіх випадках криві 1-8 не є подібними одна одній, точки балки перетинають вісь абсцис в різні моменти часу, точка максимуму не є фіксованою, тобто динамічний прогин представляє собою накладення рухомої і стоячої хвиль, що пояснюється різним зсувом фаз для кожної компоненти прогину (математично це проявляється

комплексністю коефіцієнтів  $\zeta_j$  в рішенні (2.38)-(2.39)). Однак хвиля, що рухається, як правило, відносно мала в порівнянні зі стоячою хвилею і стає помітною лише при великих коефіцієнтах в'язкого тертя.

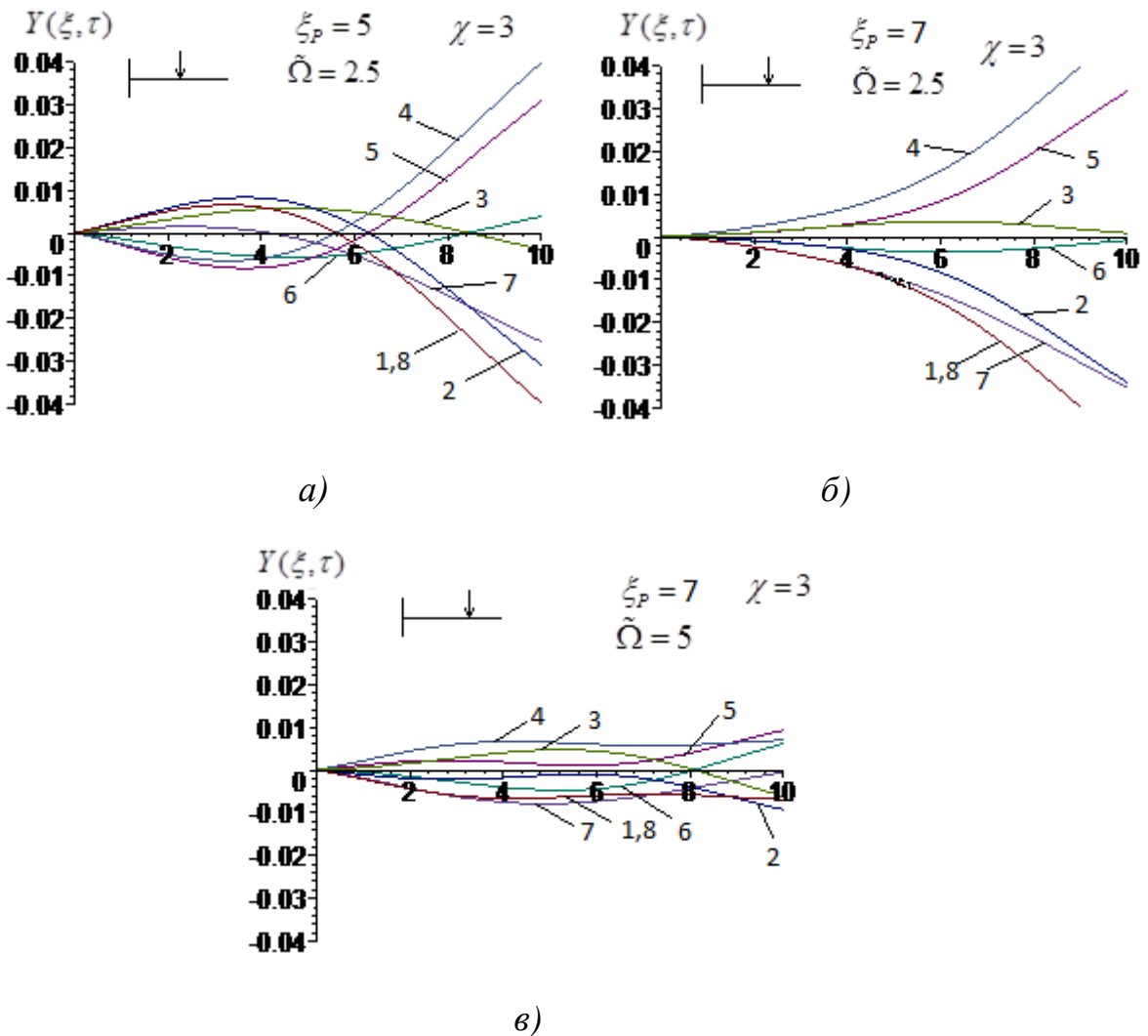


Рисунок 3.8 – Форми коливань в різні моменти часу для балки Тимошенко

$$(L/r_0 = 10, \chi = 3, \tilde{\mu} = 0.1, \tilde{\beta} = 0.1)$$

$$1 - \Omega\tau = 0, \quad 2 - \Omega\tau = \pi/4, \quad 3 - \Omega\tau = \pi/2, \quad 4 - \Omega\tau = \pi,$$

$$5 - \Omega\tau = 5\pi/4, \quad 6 - \Omega\tau = 3\pi/2, \quad 7 - \Omega\tau = 7\pi/4, \quad 8 - \Omega\tau = 2\pi$$

$$a) \xi_p = L/2r_0, \tilde{\Omega} = 2.5; \quad б) \xi_p = 7L/10r_0, \tilde{\Omega} = 2.5; \quad в) \xi_p = 7L/10r_0, \tilde{\Omega} = 5$$

### 3.5. Висновки по розділу 3

1. Допоміжна задача визначення власних частот і власних форм пружної

балки Тимошенко, рішення якої є необхідним етапом вирішення загальної задачі про вимушені коливання БТ з демпферами і ДГК, проаналізовано для двох випадків закріплення балки: шарнірно закріпленої і консольної.

2. Виконано аналіз впливу коефіцієнта зсувної піддатливості  $\chi$  на власні частоти пружної балки Тимошенко. Зсувна деформація помітно впливає на першу власну частоту досить коротких балок (для  $L/r_0=30$  і більш коротких) і на вищі форми і частоти балок будь-якої довжини. Зокрема, для  $L/r_0=10$  перша власна частота зменшується на 15-30% (в залежності від значення  $\chi$ ).

3. Форми власних коливань пружної балки Тимошенко і балки Ейлера-Бернуллі близькі для не надто коротких балок, відзначаються лише невеликі відмінності поблизу закладення. Порівняння вкладу згинальної і зсувної складових в повний прогин показує, що згинальна складова зі зростанням коефіцієнта зсувної піддатливості  $\chi$  зменшується, але все ж залишається домінуючою в повному прогині балки.

4. Виконано аналіз власних частот в'язкопружної балки Тимошенко, які є комплексними і залежать від параметра внутрішнього тертя. Дійсна частина комплексної частоти  $\alpha_k$  визначає циклічну частоту коливань, уявна частина характеризує загасання власних коливань. Кожна власна частота в'язкопружної БТ з в'язким зовнішнім тертям пов'язана з відповідною власною частотою пружної БТ формулами (3.), незалежно від граничних умов.

5. Виконано аналіз вимушених коливань пружної балки Тимошенко (без демпферів і ДГК). При малих частотах збудження (менших першої власної частоти,  $\Omega < \omega_1^*$ ) форми коливань в класичній моделі і моделі БТ мають мало відмінностей і практично збігаються з першою власною формою, а внеском вищих форм можна знехтувати. У разі ж, коли частота зовнішньої сили значно перевищує першу власну і близька до другої власної частоти, врахування другої форми є необхідним, бо саме ця форма стає домінуючою. Для частот, що не перевищують помітно третю власну частоту, можна обмежитися трьохмодовим наближенням.

6. Врахування зсувної податливості призводить до зміщення резонансу в сторону менших частот і помітного зростання амплітуд при резонансі.

7. В дорезонансній зоні ( $\Omega < \omega_1^*$ ) коефіцієнт зсувної податливості відносно слабо впливає на результат, за винятком коротких балок. У зарезонансній зоні ( $\Omega \gg \omega_1^*$ ) вплив коефіцієнта зсувної податливості істотно зростає, і класична модель Ейлера-Бернуллі і модель Релея не дають адекватного опису вимушених коливань.

8. Аналіз форм коливань в'язкопружної балки Тимошенко показує, що динамічний прогин представляє собою накладення рухомої і стоячої хвиль, в силу різного зсуву фаз компонент прогину, але рухома складова залишається досить малою і стає помітною лише при великих коефіцієнтах в'язкого тертя.

### **3.6. Список використаних джерел в розділі 3**

У розділі 3 використані джерела [22, 59, 63, 70, 78, 88, 82, 12, 52]. Їх найменування представлені у загальному списку використаних джерел.



## РОЗДІЛ 4.

### АНАЛІЗ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО З ДЕМПФЕРАМИ В'ЯЗКОГО ТЕРТЯ

Як було показано в п. 2.5.1., система рівнянь щодо узагальнених координат - коефіцієнтів розкладання  $\xi_k$  в розкладанні за власними функціями (2.30)

$Y(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi)$  для пружної балки Тимошенко з демпфером в'язкого тертя при дії

зосередженої сили має вигляд (2.58):

$$\zeta_k \left[ \omega_k^2 - \Omega^2 + i\Omega (\mu^* \omega_k^2 + \beta^*) \right] + \sum_{j=1}^{\infty} e_{kj} \zeta_j = \hat{P} Y_k(\xi_P), \quad k=1,2,\dots, \quad (4.1)$$

де

$$e_{kj} = i\Omega g_f^* Y_k(\xi_f) Y_j(\xi_f). \quad (4.2)$$

Аналогічно (2.48) коефіцієнт динамічності при дії зосередженої сили в разі одномодового розкладання має вигляд:

$$k_{dyn} = \frac{a_1 p_1^2}{\hat{P} Y_1(\xi_P)} = \frac{p_1^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 (\mu^* \omega_1^2 + \beta^* + g_f^* Y_1^2(\xi_f))^2}}. \quad (4.3)$$

З урахуванням позначень (2.49) остаточно формула має вигляд

$$k_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\Omega}^2)^2 + \tilde{\Omega}^2 (\tilde{\mu}^* \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta}^* + \tilde{g}_f^* Y_1^2(\xi_f))^2}}, \quad \tilde{g}_f^* = g_f^* / p_1, \quad (4.4)$$

де  $\tilde{\beta} = \tilde{\mu}^* \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta}^*$ .

Величину

$$\tilde{\mu}^* \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta}^* + \tilde{g}_f^* Y_1^2(\xi_f) \quad (4.5)$$

можна розглядати як узагальнений показник в'язкого тертя в системі, що враховує три основні чинника: внутрішнє тертя в балці, зовнішнє тертя і тертя в демпфері.

У чисельному аналізі коливань в'язкопружної балки Тимошенко з демпфером в'язкого тертя розглядалися два випадки ГУ: (1) двухопорна шарнірна балка і (2)

консольна балка. Вивчався вплив різних параметрів - коефіцієнта зсувної піддатливості  $\chi$ , відносної довжини балки  $L/r_0$ , узагальненого коефіцієнта в'язкого тертя в балці  $\tilde{\beta}$ , коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  на форму і амплітуди коливань.

#### 4.1. Шарнірно закріплена балка

Розглянемо в'язкопружну шарнірно-обперту балку Тимошенко (Рис. 4.1), в деякому перетині  $\xi_p$  якої діє зосереджена гармонійна сила  $P$  з частотою  $\Omega$ , а в перетині  $\xi_f$  розташований демпфер в'язкого тертя.

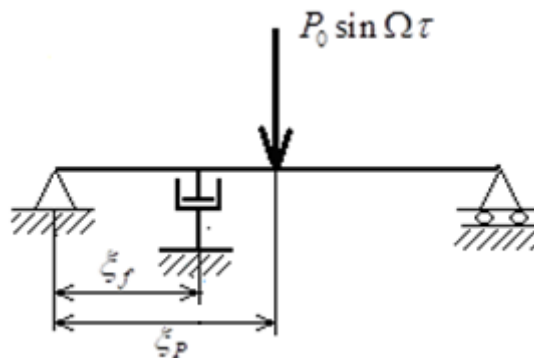


Рисунок 4.1 - В'язкопружна балка Тимошенко з демпфером в'язкого тертя і зосередженою гармонійною силою

*Одномодове наближення.*

Спочатку розглянемо результати одномодового наближення (4.3), яке, як очікується, буде достатнім при частоті зовнішньої сили нижче 1-ї власної частоти БТ, і в ряді випадків для більш високих частот.

Нижче представлено графіки для випадку, коли демпфер розташований в середньому по довжині перетині балки, і сила діє в тому ж перетині ( $\xi_p = \xi_f = L/2r_0$ ), криві побудовані для коефіцієнта динамічності (4.3) при різних значеннях параметрів  $L/r_0$ ,  $\chi$ ,  $\tilde{\beta}$  і  $\tilde{g}_f^*$ . Для параметра  $\chi$  приймалися наступні три значення:  $\chi = 0; 3; 10$ .

Вплив в'язкого тертя в балці і тертя в демпфері. На Рис. 4.2 представлені залежності коефіцієнта динамічності від параметра в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  при різних значеннях параметра  $\tilde{\beta}$ , що характеризує внутрішнє і зовнішнє тертя в балці (0, 0.1, 0.3, 0.5, 1). Графіки наведені для різних значень параметра  $\chi$  при  $\tilde{\Omega}=1$ .

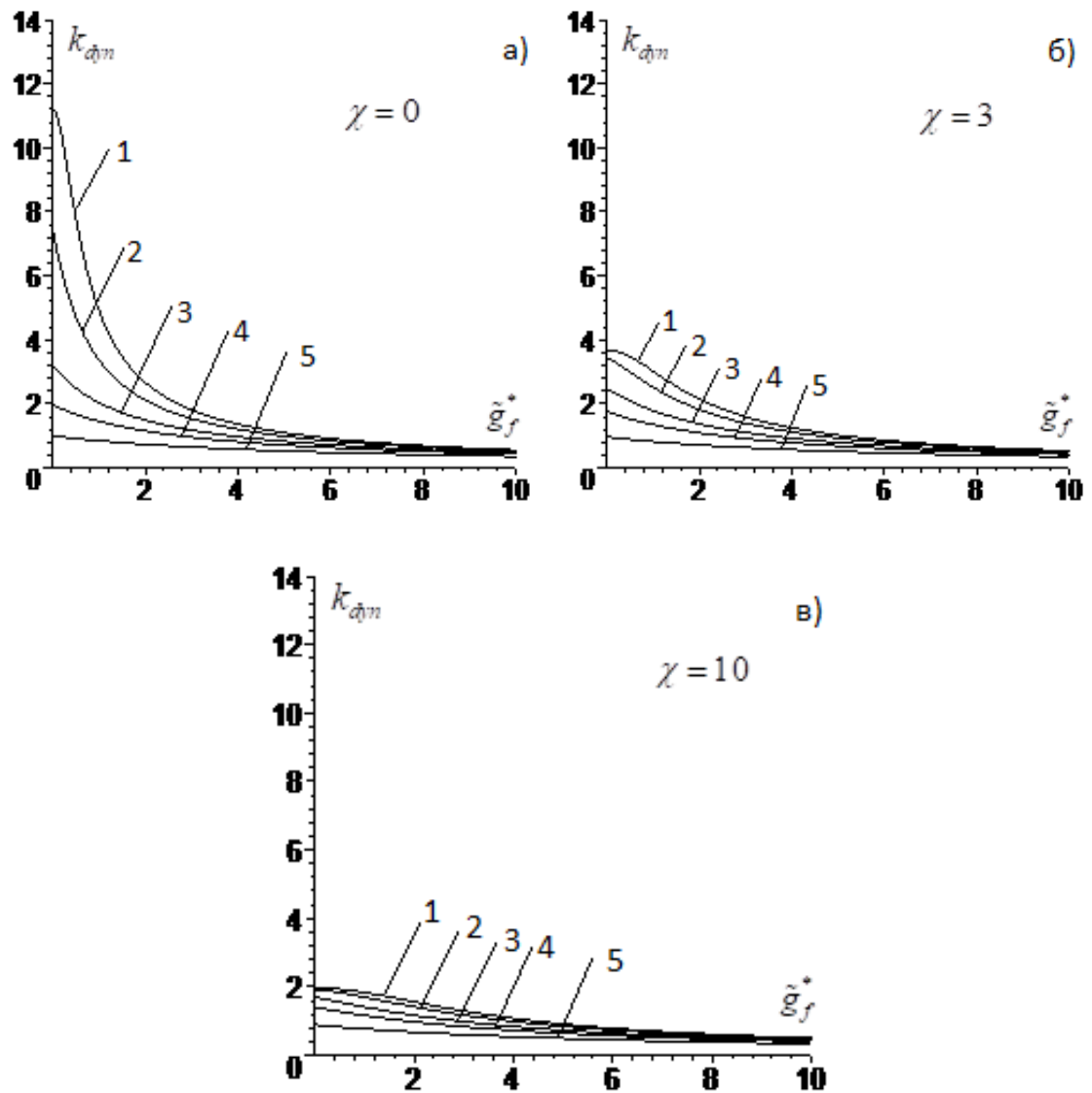


Рисунок 4.2 – Залежність коефіцієнта динамічності від параметра тертя демпфера  $\tilde{g}_f^*$  для різних значень параметра внутрішнього тертя в балці  $\tilde{\beta}$ ;

1)  $\tilde{\beta}=0$ , 2)  $\tilde{\beta}=0.1$ , 3)  $\tilde{\beta}=0.3$ , 4)  $\tilde{\beta}=0.5$ , 5)  $\tilde{\beta}=1$

Аналізуючи графіки, наведені на Рис. 4.2, можна відзначити, що врахування коефіцієнта тертя  $\tilde{\beta}$ , як і очікувалося, призводить до зниження максимальних значень коефіцієнта динамічності. Облік зсувної піддатливості  $\chi$  також призводить до зниження коефіцієнта  $k_{dyn}$  і зменшує вплив інших змінних параметрів. З Рис. 4.2 (а) – в)) бачимо, що застосування демпфера істотно знижує значення коефіцієнта динамічності, так, при  $\chi=3$ ,  $\tilde{\beta}=0$ , підвищення коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері до  $\tilde{g}_f^*=1$  (в порівнянні з  $\tilde{g}_f^*=0$ , тобто без урахування демпфера) призводить до зниження амплітуд на  $\approx 11\%$ , при  $\tilde{g}_f^*=2$  амплітуди знижуються на  $\approx 33\%$ . Відзначимо, що демпфер має суттєвий вплив на амплітуди коливань лише в околорезонансному діапазоні, але саме такий ефект потрібен в практичних завданнях.

Що стосується порівняльної оцінки ролі внутрішнього тертя в балці, зовнішнього тертя і в'язкого тертя в демпфері, то в одномодовому наближенні вона витікає з формули для коефіцієнта динамічності (4.4), в якій спільний ефект визначається величиною  $\tilde{\mu}^* \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta}^* + \tilde{g}_f^* Y_1^2(\xi_f)$ , а окремі ефекти - кожним з цих доданків. Зокрема, якщо прогин в точці кріплення демпфера для 1-ї власної форми (нормалізованої діленням на радіус інерції перерізу балки  $r_0$ )  $Y_1(\xi_f)=1$ , то вплив кожного з доданків  $\tilde{\beta} + \tilde{g}_f^* Y_1^2(\xi_f)$  і  $\tilde{g}_f^*$  виявляється однаковим.

*Врахування кількох власних форм в розкладанні вимушених коливань.*

При обліку в (2.30) перших трьох власних форм в розкладанні прогину система (4.1) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \zeta_1 [\omega_1^2 - \Omega^2 + i\Omega (\mu^* \omega_1^2 + \beta^*)] + \sum_{j=1}^3 e_{1j} \zeta_j = \hat{P} Y_1(\xi_p) \\ \zeta_2 [\omega_2^2 - \Omega^2 + i\Omega (\mu^* \omega_2^2 + \beta^*)] + \sum_{j=1}^3 e_{2j} \zeta_j = \hat{P} Y_2(\xi_p) \\ \zeta_3 [\omega_3^2 - \Omega^2 + i\Omega (\mu^* \omega_3^2 + \beta^*)] + \sum_{j=1}^3 e_{3j} \zeta_j = \hat{P} Y_3(\xi_p) \end{cases} \quad (4.6)$$

Розрахунки проводилися при наступних значеннях параметрів:  $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\tilde{\beta}=0.1$ ,  $\tilde{g}_f^*=0.1$ , для зосередженої сили в середньому перерізі ( $\xi_p=5$ ). Для демпфера

розглянуті два випадки розташування: в середньому перерізі ( $\xi_f = 5$ ) і в перерезі  $\xi_f = 3$  (відповідно Рис. 4.3, *a* і *б*).

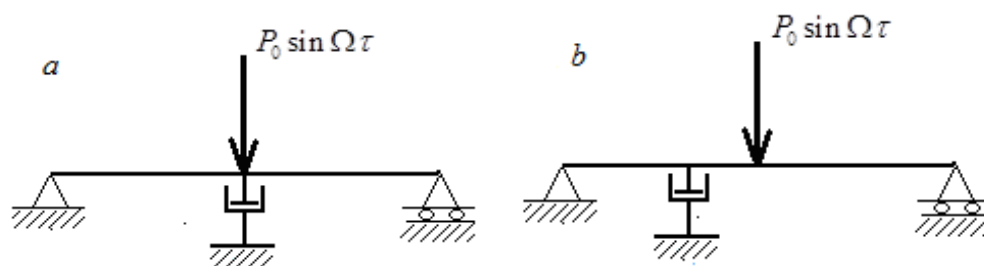


Рисунок 4.3 - Схеми розташування сили і демпфера

У Таблиці 4.1 наведені коефіцієнти розкладання, розраховані по системі рівнянь (4.6) для зазначених двох схем при різних значеннях частоти (параметра  $\Omega / p_1$ ).

Таблиця 4.1. Коефіцієнти розкладання  $\zeta_k$  по трьом власним формам

$$(L/r_0=10, \chi=3, \tilde{\beta}=0.1, \tilde{g}_f^*=1)$$

Схема Рис. 4.3, *a*,  $\xi_p = 5$ ,  $\xi_f = 5$

$\Omega / p_1$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$
0.5	$0.8307-0.2545 i$	0.0	$-0.0199+0.0040 i$
0.9	$-0.4855-1.5215 i$	0.0	$-0.0089-0.0040 i$
1	$-0.7583-0.7948 i$	0.0	$-0.0145-0.0070 i$
1.25	$-0.4417-0.1853 i$	0.0	$-0.0204-0.0050 i$
1.5	$-0.2656-0.0714 i$	0.0	$-0.0224-0.0035 i$
1.8	$-0.1667-0.0312 i$	0.0	$-0.0243-0.0025 i$

Схема Рис. 4.3, *б*,  $\xi_p = 5$ ,  $\xi_f = 3$

$\Omega / p_1$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$
0.5	$0.8601-0.1996 i$	$-0.0024-0.0093 i$	$-0.0214-0.0009 i$

0.9	$-0.7321-1.8730 i$	$-0.0399+0.0177 i$	$-0.0257+0.0018 i$
1	$-0.9546-0.7982 i$	$-0.0187+0.0249 i$	$-0.0238+0.0025 i$
1.25	$-0.4706-0.1600 i$	$-0.0044+0.0169 i$	$-0.0230+0.0016 i$
1.5	$-0.2737-0.0616 i$	$-0.0017+0.0137 i$	$-0.0236+0.0013 i$
1.8	$-0.1698-0.0280 i$	$-0.0002+0.0133 i$	$-0.0248+0.0011 i$

Як бачимо з таблиці 4.1, коефіцієнт при першій власній формі є найбільш вагогим (для схеми  $a$  друга форма не індукується, а коефіцієнт при третій формі на порядок менше коефіцієнта при першій моді). У другій схемі ( $\xi_p = 5$ ,  $\xi_f = 3$ ) перша мода залишається домінуючою при частотах, менших першої власної частоти пружної балки (без демпфера), однак з ростом частоти зростає роль вищих форм, якими вже не можна нехтувати.

Для випадку Рис. 4.3,  $a$ , (сила і демпфер в середньому перерізі балки), трьохмодове рішення досить близько до одномодового. Порівняємо отримані числові рішення для випадку  $\Omega/p_1 = 0.9$ , що приблизно відповідає резонансу в моделі балки Тимошенко при  $\chi = 3$ . Для  $\Omega/p_1 = 0.9$  були отримані наступні комплексні амплітуди:  $\zeta_1 = -0.4855 - 1.5215i$ ,  $\zeta_2 = 0$ ,  $\zeta_3 = -0.0088 - 0.0040i$ , а для одномодового рішення маємо  $\zeta_1 = -0.4796 - 1.5207i$ . Бачимо, що в даному випадку одномодове наближення дає невелику похибку. У разі ж, коли демпфер розташований в точці  $\xi_f = 3$ , для  $\Omega/p_1 = 0.9$  ця похибка зростає. Так, одномодове рішення дає  $\zeta_1 = -0.7545 - 1.8730i$ , в той час як в трьохмодовому рішенні, згідно Таблиці 4.1, маємо  $\zeta_1 = -0.7321 - 1.8730i$ ,  $\zeta_2 = -0.0399 + 0.0177i$ ,  $\zeta_3 = -0.0257 + 0.0018i$ . В даному випадку можна говорити про те, що облік трьох мод призводить до помітного уточнення рішення.

Розглянемо, які якісні зміни дає врахування декількох власних форм в розкладанні прогину. На Рис. 4.4 показане положення зігнутої осі балки ( $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\Omega/p_1 = 1$ )  $Y(\xi, \tau)$  для восьми рівновіддалених моментів часу:

$\Omega^* \tau = 0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4 \dots, 7\pi/4$  для двох схем а і б.

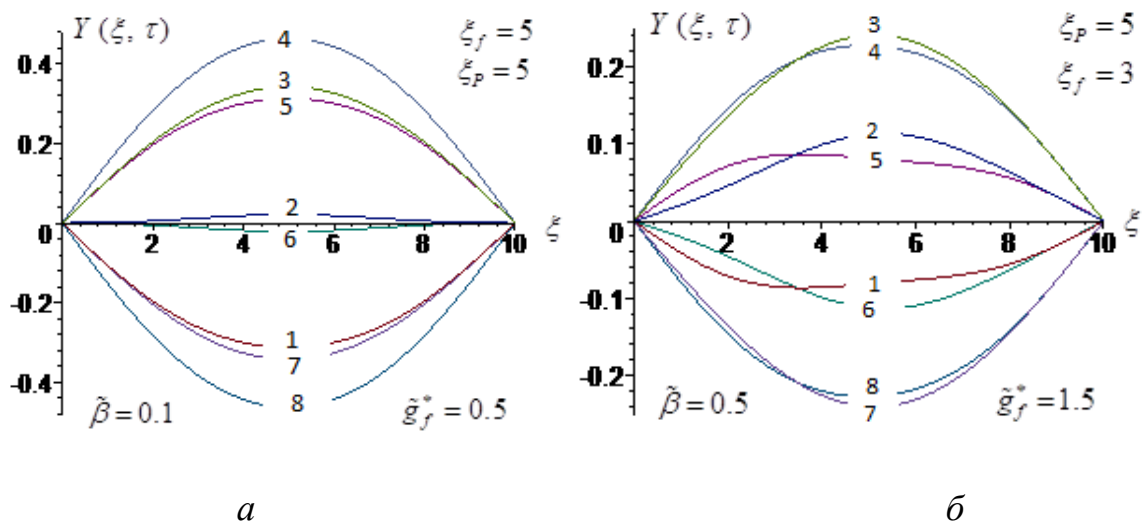


Рисунок 4.4 - Динамічний прогин балки  $Y(\xi, \tau)$  для випадку (а) (сила і демпфер в центрі балки) і випадку (б) асиметричного розташування демпфера ( $x_d / L = 0.3$ ) для 8 моментів часу, криві 1-8; 1)  $\Omega^* \tau = 0$ ; 2)  $\Omega^* \tau = \pi/4$ ; 3)  $\Omega^* \tau = \pi/2$ ; 4)  $\Omega^* \tau = 3\pi/4$ , 5)  $\Omega^* \tau = \pi$ ; 6)  $\Omega^* \tau = 5\pi/4$ ; 7)  $\Omega^* \tau = 3\pi/2$ ; 8)  $\Omega^* \tau = 7\pi/4$

У випадку (а) всі криві зігнутої осі балки є подібними одна одній, абсциса точки максимуму залишається незмінною, всі точки кривої перетинають вісь абсцис в один і той же момент часу. Отже, динамічний прогин є стоячій хвилею. Для випадку (б) така подібність не спостерігається, тимчасові залежності для різних точок різні, точки кривих перетинають вісь абсцис в різні моменти часу. Динамічний прогин представляє собою накладення стоячій і рухомої хвиль.

Відмінності між цими випадками залежать не тільки від точки прикладання гасника і сили, але також і від параметра в'язкого тертя в демпфері і від інших параметрів. На Рис. 4.5, а, б, представлені криві для балки з параметрами:  $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\xi_p = 5$ ,  $\xi_f = 3$ ,  $\tilde{\Omega} = 1$  при: (а)  $\tilde{\beta} = 0.4$ ,  $\tilde{g}_f^* = 0.1$ ; (б)  $\tilde{\beta} = 0.6$ ,  $\tilde{g}_f^* = 0.9$ .

Як бачимо з Рис. 4.5, у випадку (б) також спостерігається хвиля, що рухається, на відміну від випадку (а), коли коливання практично являють собою стоячу хвилю, тобто можна говорити, що наявність рухомої складової залежить не тільки

від точки прикладання демпфера, а від комбінації параметрів, що характеризують внутрішнє тертя в балці, в'язке тертя в демпфері, точки прикладання сили і демпфера.

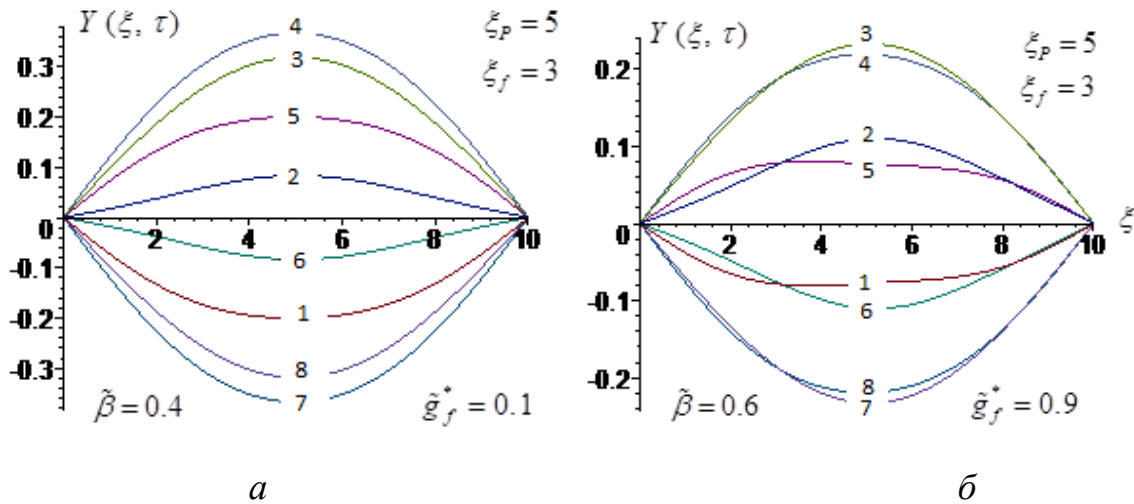


Рисунок 4.5 - Динамічний прогин  $Y(\xi, \tau)$  для асиметричного розташування демпфера  $\xi_f = 3$  (балка  $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\tilde{\Omega} = 1$ ,  $\xi_p = 5$ ) (a)  $\tilde{\beta} = 0.4$ ,  $\tilde{g}_f^* = 0.1$ ; (b)  $\tilde{\beta} = 0.6$ ,  $\tilde{g}_f^* = 0.9$ ; для восьми моментів часу (криві 1-8): 1)  $\Omega^* \tau = 0$ ; 2)  $\Omega^* \tau = \pi/4$ ; 3)  $\Omega^* \tau = \pi/2$ ; 4)  $\Omega^* \tau = 3\pi/4$ , 5)  $\Omega^* \tau = \pi$ ; 6)  $\Omega^* \tau = 5\pi/4$ ; 7)  $\Omega^* \tau = 3\pi/2$ ; 8)  $\Omega^* \tau = 7\pi/4$

## 4.2. Консольна балка

Розглянемо тепер випадок консольної балки, який представляє інтерес, зокрема, в зв'язку з проблемою гасіння коливань баштових споруд. Тут ми також спочатку будемо використовувати одномодове наближення і будувати АЧХ, потім перейдемо до більш точного розрахунку, необхідного при аналізі високих частот. Розглядаються випадки розташування сили на вільному краї балки при двох варіантах розташування демпфера, показаних на Рис. 4.6.

Власні форми консольної балки Тимошенко визначаються виразами (3.16), як було показано в розділі 3.



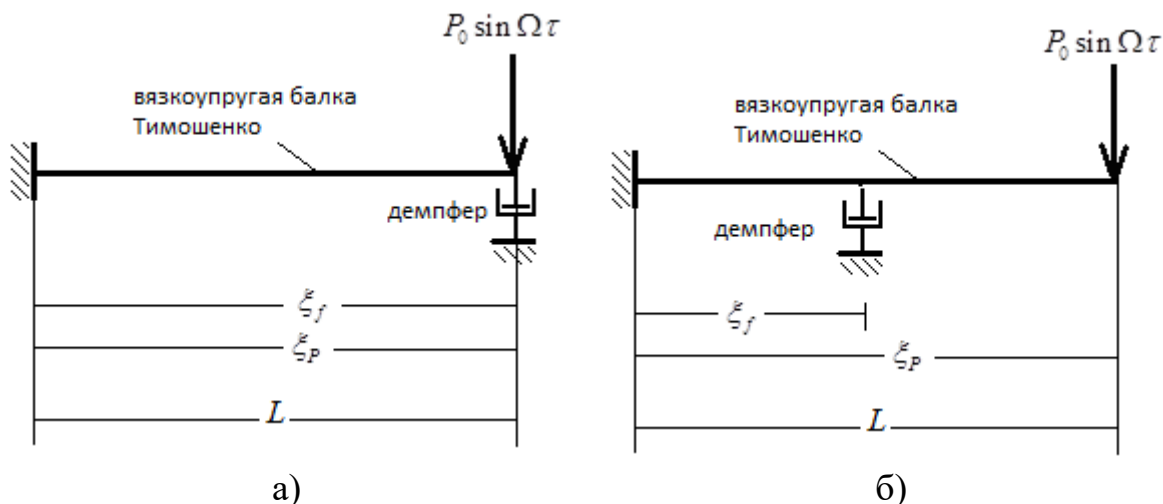


Рисунок 4.6 - Два випадки розташування демпфера на консольній БТ

Одномодове наближення. Вплив коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  на вимушені коливання БТ.

На Рис. 4.7 побудовані залежності коефіцієнта динамічності від параметра в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$ , при  $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 0$  (модель Релея) для двох значень параметра внутрішнього тертя  $\tilde{\beta}$  (0.1, 0.5) (Рис. 4.7, а і б, відповідно);

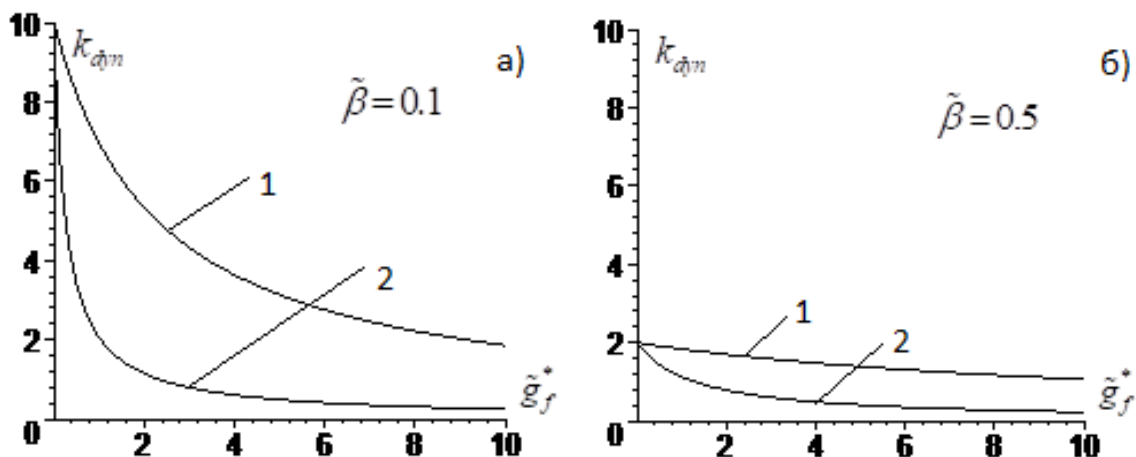


Рисунок 4.7 – Залежно коеф. динамічності від параметра в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  при  $\chi = 0$  для двох схем розташування демпфера: криві 1 - демпфер в центрі балки ( $\xi_f = L/2r_0$ ), криві 2 – демпфер на кінці ( $\xi_f = L/r_0$ )

Криві 1 отримані при розташуванні демпфера в середньому перерізі, криві 2 - на краї балки. На Рис. 4.8 представлені аналогічні залежності в моделі Тимошенко ( $\chi = 3$ ).

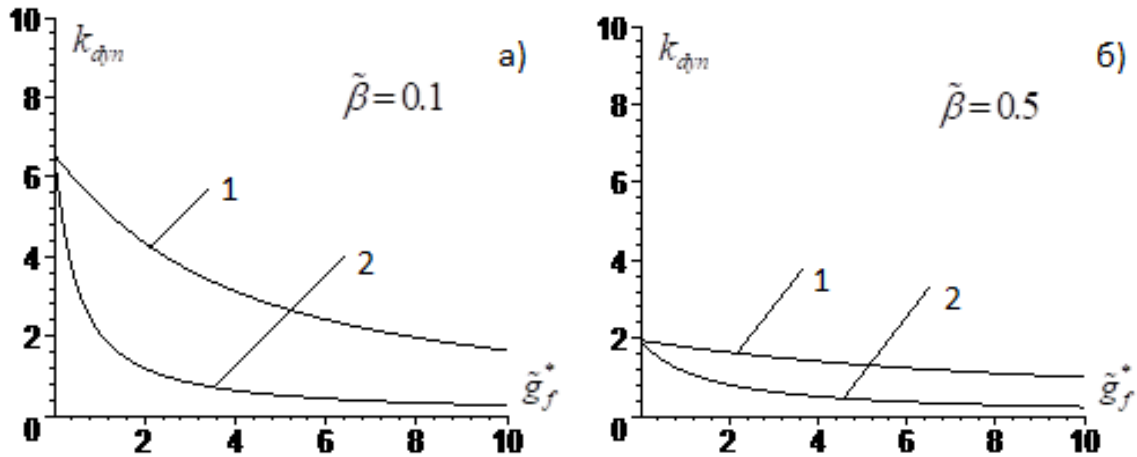


Рисунок 4.8 – Залежність коефіцієнта динамічності від параметра в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  при  $\chi = 3$  для двох схем розташування демпфера: криві 1 - демпфер в центрі балки ( $\xi_f = L/2r_0$ ), криві 2 – демпфер на краї ( $\xi_f = L/r_0$ )

Як і слід було очікувати, місце розташування істотно впливає на ефективність демпфера; максимальний ефект гасіння досягається при розташуванні демпфера на краї консольної балки. Вплив демпфера на коефіцієнт динамічності особливо великий в разі малого внутрішнього тертя в самій балці; зі збільшенням коефіцієнта внутрішнього тертя цей вплив помітно зменшується.

Порівнюючи отримані залежності з наведеними вище для двоопорної шарнірно закріпленої балки, можна відзначити, що отримані результати досить близькі; можна очікувати, що це стосується і решти граничних умов.

*Трьохмодове наближення.* Розглянемо далі форми коливань  $y(\xi)$  балки Тимошенко в трьохмодовому наближенні для наступних параметрів балки:  $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\tilde{\beta} = 0.1$ ,  $\tilde{g}_f^* = 1$ ; гармонійна зосереджена сила з частотою  $\Omega$  діє на вільному краї ( $\xi_P = L/r_0$ ), демпфер розташований в точках

$\xi_f = 0.25L/r_0, 0.5L/r_0, 0.75L/r_0, L/r_0$ . Значення коефіцієнтів  $\zeta_k$  в розкладанні прогину (2.30) наведено в Таблиці 4.2.

Таблиця. 4.2 – Коефіцієнтів  $\zeta_k$  в розкладанні прогину (2.30) для чотирьох випадків розташування демпфера і трьох частот збудження

$$(L/r_0 = 10, \chi = 3, \tilde{\beta} = 0.1, \tilde{g}_f^* = 1, \xi_p = L/r_0).$$

$\Omega/\omega_1$	$0.1\xi_f$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$
0.9	1	$0.2449 - 1.3978 i$	$-0.0068 + 0.0040 i$	$0.0012 - 0.0007 i$
	0.75	$0.7116 - 2.2789 i$	$-0.0316 - 0.0007 i$	$0.0080 + 0.0009 i$
	0.5	$1.9223 - 3.4124 i$	$-0.0450 - 0.0085 i$	$0.0056 + 0.0002 i$
	0.25	$3.1013 - 3.9244 i$	$-0.0333 - 0.0033 i$	$0.0037 - 0.0011 i$
2.5	1	$-0.1093 - 0.0173 i$	$-0.0411 - 0.0037 i$	$0.0053 + 0.0006 i$
	0.75	$-0.1107 - 0.0146 i$	$-0.0420 + 0.0015 i$	$0.0055 - 0.0005 i$
	0.5	$-0.1120 - 0.0096 i$	$-0.0419 + 0.0046 i$	$0.0054 - 0.0000 i$
	0.25	$-0.1122 - 0.0059 i$	$-0.0419 + 0.0021 i$	$0.0055 + 0.0003 i$
5.0	1	$-0.0233 - 0.0059 i$	$0.0649 + 0.0200 i$	$0.0067 + 0.0015 i$
	0.75	$-0.0250 - 0.0012 i$	$0.0705 + 0.0047 i$	$0.0071 - 0.0003 i$
	0.5	$-0.0253 + 0.0005 i$	$0.0687 + 0.0113 i$	$0.0071 + 0.0000 i$
	0.25	$-0.0250 - 0.0002 i$	$0.0695 + 0.0101 i$	$0.0072 - 0.0009 i$

Як бачимо з таблиці 4.2, для частот, менших другої власної частоти, внесок першої власної форми виявляється найбільш вагомим, друга і третя форми проявляються відносно слабо, зсув фази  $\theta_k$  також залишається невеликим. У разі, коли частота  $\Omega$  потрапляє в діапазон між 2- й і 3-й власними частотами, провідною стає друга форма. Внесок третьої форми в даному випадку залишається таким саме малим у порівнянні з першою і другою.

Розглянемо форми коливань консольної балки Тимошенко в різні моменти часу для декількох випадків розташування гасника і сили – посередині прольоту балки ( $\xi_p = L/2r_0, \xi_f = L/2r_0$ ) та вільному краї ( $\xi_f = L/r_0, \xi_p = L/r_0$ ), та при частоті зовнішньої сили  $\tilde{\Omega} = 2.5$  та  $\tilde{\Omega} = 5$  (Рис. 4.9).

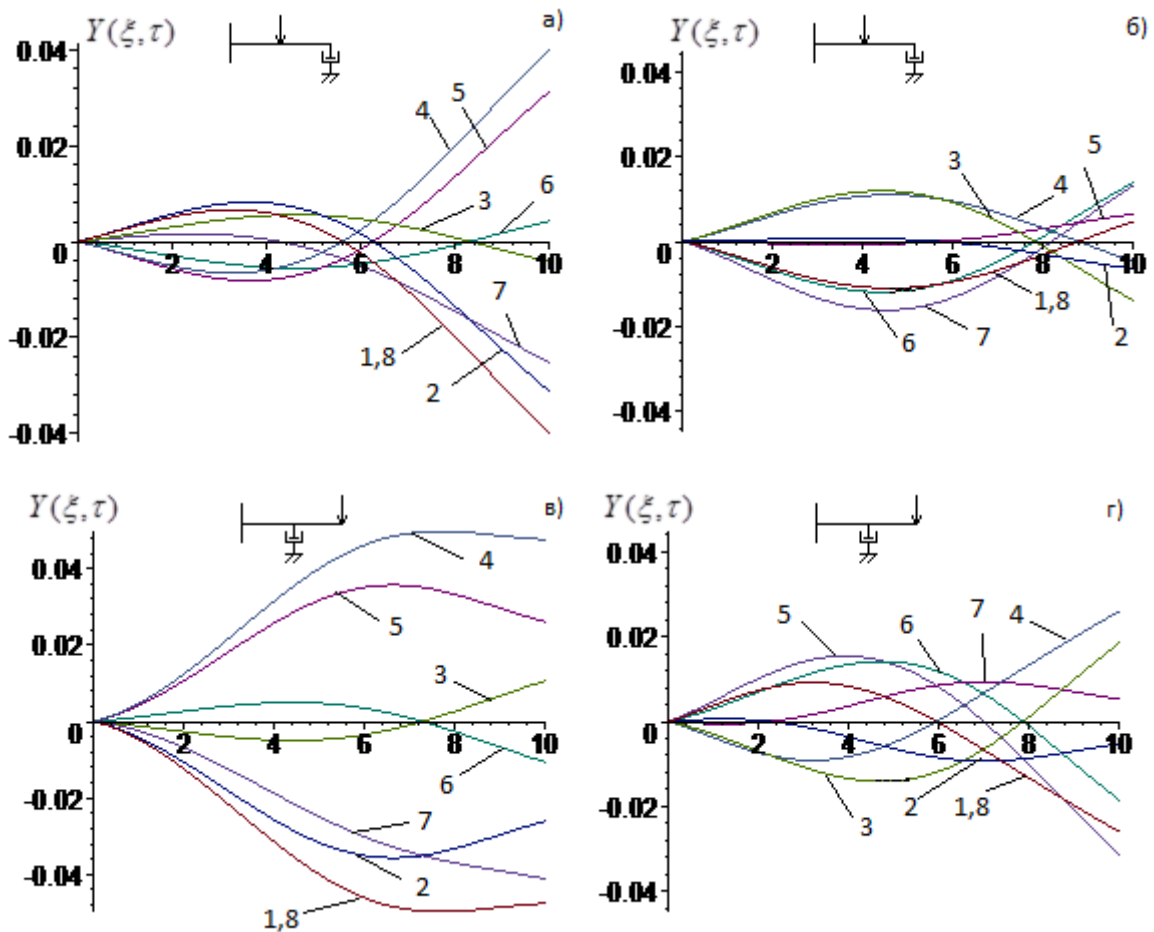


Рисунок 4.9 – Форми коливань в різні моменти часу для балки Тимошенко з

демпфером в'язкого тертя ( $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\tilde{\beta} = 0.1$ ,  $\tilde{g}_f^* = 0.1$ );

а)  $\tilde{\Omega} = 2.5$ ,  $\xi_f = L/r_0$ ,  $\xi_p = L/2r_0$ ; б)  $\tilde{\Omega} = 5$ ,  $\xi_f = L/r_0$ ,  $\xi_p = L/2r_0$

в)  $\tilde{\Omega} = 2.5$ ,  $\xi_f = L/2r_0$ ,  $\xi_p = L/r_0$ ; г)  $\tilde{\Omega} = 5$ ,  $\xi_f = L/2r_0$ ,  $\xi_p = L/r_0$

(1- $\Omega\tau=0$ , 2- $\Omega\tau=\pi/4$ , 3- $\Omega\tau=\pi/2$ , 4- $\Omega\tau=\pi$ , 5- $\Omega\tau=5\pi/4$ , 6- $\Omega\tau=3\pi/2$ , 7- $\Omega\tau=7\pi/4$ , 8- $\Omega\tau=2\pi$ ))

Як і для випадку шарнірно закріпленої балки, на Рис. 4.9 спостерігаємо в ряді випадків рухомі хвилі, інтенсивність яких визначається рядом параметрів, таких, як розташування демпфера і точки прикладання сили, коефіцієнт в'язкого тертя в демпфері, коефіцієнт внутрішнього тертя, а також частота зовнішньої сили.

**4.3. Експериментальне дослідження коливань в'язкопружної балки з демпфером в'язкого тертя**

### 4.3.1. Загальні відомості про експеримент

В експерименті вивчалися вимушені коливання шарнірно обпертої балки з демпфером в'язкого тертя, розташованим поблизу середнього перетину (під балкою). Демпфер являв собою ємність, заповнену рідиною, в якій рухався поршень (стрижень з круглою перфорованою діафрагмою), з'єднаний з балкою (Рис. 4.10).



Рисунок 4.10 - Експериментальна установка для вивчення вимушених коливань балки

Розміри балки, що розглядається в експерименті, становили  $60 \times 4,9 \times 0,2$  (см). В якості рідини використовувалися вода або гліцерин (які мають суттєво різні характеристики в'язкості). Коливання збуджувались вібратором, розташованим в середньому перерізі (над балкою).

Поблизу середнього перетину під балкою містився також пристрій, що реєструє амплітуди коливань (електромагнітний датчик). Показання датчика записувалися на осцилограф. Кутова швидкість обертання вібратора і відповідно частота обурення плавно змінювалися в досить широких межах. На частоті, що відповідає першому резонансу, записувалися коливання в середньому перерізі.

Для визначення параметрів внутрішнього тертя в балці  $\mu$  і коефіцієнтів в'язкого тертя в демпфері  $\beta$  для різних рідин проводилися окремі попередні експерименти.

### 4.3.2. Визначення коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері.

Коефіцієнти в'язкого тертя в демпферах з різними рідинами визначалися в досліді з аналізу вільних коливань вантажу маси на пружині, з'єднаного з тим же демпфером. Типова осцилограма показана на Рис. 4.11.

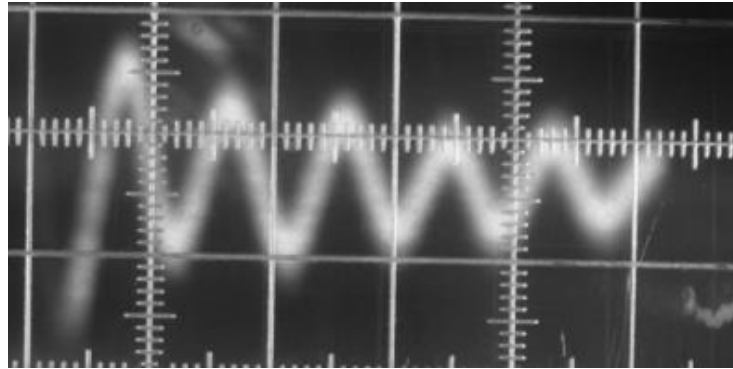


Рисунок 4.11 - Осцилограма вільних коливань вантажу з демпфером (гліцерин)

За осцилограмою визначалися період коливань  $T$ , амплітуди і обчислювався логарифмічний декремент коливань за середнім значенням відношень двох сусідніх амплітуд  $a_k$  и  $a_{k+1}$ :

$$\eta = \ln \left( \frac{a_k}{a_{k+1}} \right). \quad (4.7)$$

Потім обчислювалися параметр тертя  $n = \eta / T$  і коефіцієнт  $\beta = 2\pi n$ .

Були отримані наступні значення коефіцієнтів в'язкого тертя  $\beta$  для демпферів з водою і гліцерином (для даної діафрагми): для води  $\beta = 0,27$  (кг/с), для гліцерина  $\beta = 1$  (кг/с).

Похибка визначення  $\beta$  не перевищувала 5%. Безрозмірний параметр в'язкого тертя  $\tilde{\beta}$  визначався в залежності від параметрів балок, виходячи зі співвідношення (2.49).

### 4.3.3. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя в балці

Коефіцієнт внутрішнього тертя в балці  $\mu$  визначався по вільних коливаннях

балки (без демпфера). Типова осцилограма показана на Рис. 4.12.

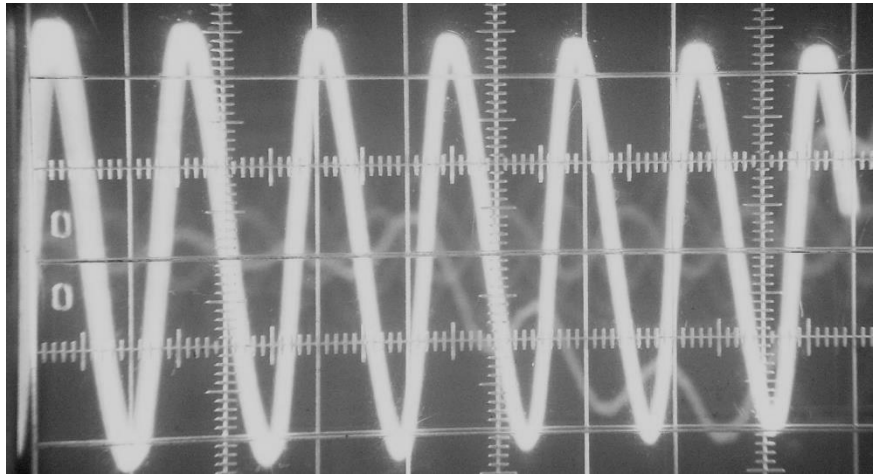


Рисунок 4.12 - Вільні коливання балки (без демпфера)

За осцилограмою коливань визначався логарифмічний декремент коливань  $\eta$  (аналогічно осцилятору, по відношенню сусідніх амплітуд). Для встановлення його зв'язку з коефіцієнтом  $\mu$  розглянемо рівняння вільних коливань (2.16). Частинні розв'язки цього рівняння, що визначають власні форми коливань, можуть бути записані у вигляді (з врахуванням (3.26), (3.27, б))

$$\tilde{Y}_k(\xi, \tau) = e^{-\gamma_k \tau} \tilde{Y}_k(\xi) \sin \alpha_k \tau, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(\mu^* \omega_k^2 + \beta).$$

При коливаннях балки в повітрі (без демпфера) можна прийняти  $\beta = 0$ . Тоді звідси витікає, що логарифмічний декремент  $\eta$  для першої форми коливань балки пов'язаний з параметром  $\mu$  залежністю (тут -  $T_1$ ,  $\omega_1$  - період і власна частота для першої форми)  $\eta = \frac{\mu \omega_1^2 T_1}{2} = \mu \pi \omega_1$ , звідки

$$\mu = \frac{\eta}{\pi \omega_1}, \quad \mu^* = \omega_1 \mu = \frac{\eta}{\pi}. \quad (4.8)$$

Були отримані наступні значення логарифмічного декременту і безрозмірного коефіцієнта внутрішнього тертя для випробуваної балки (середні значення в чотирьох випробуваннях):  $\eta = 0.0296$ ,  $\mu^* = 0.0094$ .

#### 4.3.4. Вимушені коливання балки з демпфером.

В експерименті використовувалася балка з розмірами  $60 \times 4,9 \times 0,2$  см. Для цієї балки безрозмірні коефіцієнти  $\tilde{\beta}$  (2.49) дорівнюють: для води  $\tilde{\beta} = 0,008$ , для гліцерина  $\tilde{\beta} = 0,0297$ .

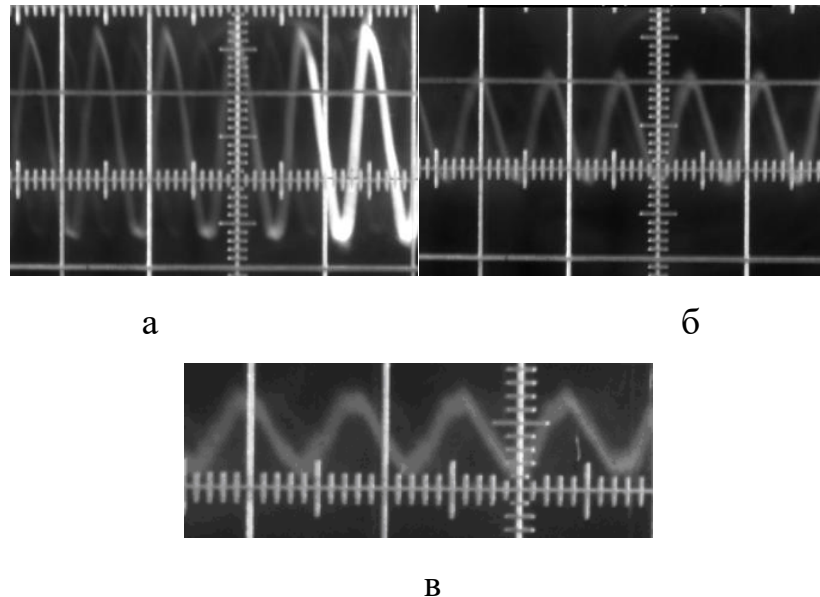


Рисунок 4.13 - Вимушені коливання балки без демпфера (а), з демпфером (вода) (б) і з демпфером (гліцерин) (в)

Осцилограми вимушених коливань балки на першому резонансі для трьох варіантів - (а) балка без демпфера, (б) балка з демпфером, заповненим водою, і (в) балка з демпфером, заповненим гліцерином, показані на Рис. 4.13. Демпфер з водою зменшував амплітуду коливань приблизно в два рази, демпфер з гліцерином - в чотири рази.

Для порівняння розрахункових і експериментальних даних для змушених коливань балки з демпфером були побудовані амплітудно-частотні характеристики змушених коливань з визначеними в експериментах з вільними коливаннями коефіцієнтами  $\tilde{\mu}$  і  $\tilde{\beta}$ . Ці АЧХ наведені на Рис. 4.14 для балки без демпфера і для різних демпферів (вода, гліцерин).

Згідно з розрахунком, застосування в'язкого демпфера на основі гліцерину



зменшує максимальні амплітуди коливань приблизно в 6,2 рази, а на основі води  $\rightarrow$  приблизно в 2,5 рази (для даної балки). Ці величини задовільно узгоджуються з експериментальними даними (Рис. 4.13).

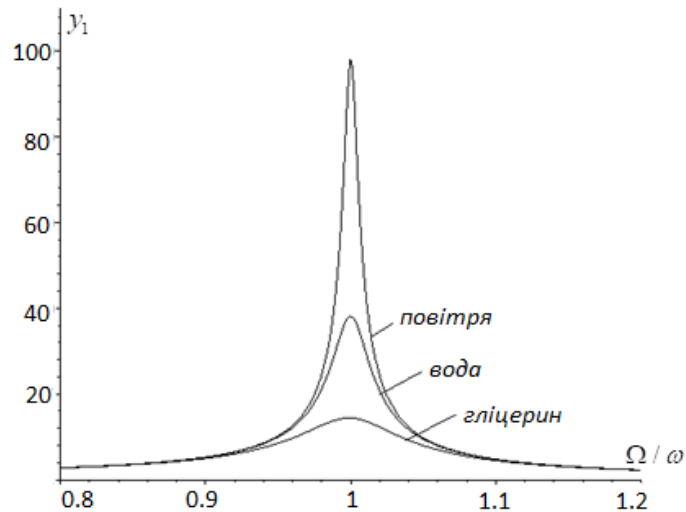


Рисунок 4.14 - Амплітудно-частотні криві для балки з урахуванням демпфування в різних середовищах

Розбіжність між експериментальними і теоретичними результатами може бути пов'язана як зі спрощеннями розрахункової схеми (неврахування точкових мас вібратора та реєструючого пристрою), так і з відмінностями між резонансною частотою балки і частотою осцилятора, за допомогою якого визначався коефіцієнт в'язкого тертя в демпфері.

Отримані експериментальні дані дозволяють зробити висновок про ефективність застосування демпферів в'язкого тертя для гасіння коливань елементів мостів та інших балкових конструкцій, а також про досить хорошу відповідність теоретичних і експериментальних результатів.

#### 4.4. Висновки по розділу 4

1. Виконано аналіз сталих вимушених коливань в'язкопружної балки Тимошенко з демпфером в'язкого тертя при дії гармонійного навантаження. На

прикладях шарнірно закріпленої і консольної балок вивчено вплив різних параметрів - коефіцієнта зсувної піддатливості  $\chi$ , відносної довжини балки  $L/r_0$ , узагальненого коефіцієнта в'язкого тертя в балці  $\tilde{\beta}$  і параметрів демпфера (коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  і місця його розташування) на форми і амплітуди коливань.

2. Наближений параметричний аналіз може бути виконаний в рамках одномодового наближення, що застосовується при частотах, що не перевищують помітно першу власну частоту. У цьому наближенні побудовані амплітудно-частотні характеристики, і вплив демпфера може бути зведений до збільшення ефективного коефіцієнта в'язкого тертя балки, відповідно до виразу (4.5).

3. Оскільки зсувна податливість  $\chi$  (що враховується в моделі Тимошенко) збільшує амплітуди коливань при резонансі, необхідні параметри гасників в БТ відрізняються від їх параметрів класичної моделі і можуть бути визначені на підставі отриманого рішення.

4. У загальному випадку, що вимагає врахування декількох власних форм при розрахунку вимушених коливань, вивчено вплив в'язкості, розташування демпфера і характеру прикладання сил на вимушені коливання. Форми коливань в загальному випадку являють собою накладення стоячих і рухомих хвиль. Рухома компонента зростає зі збільшенням кількості значущих гармонік, зокрема, при високих частотах збудження. Істотний вплив на цю компоненту має розташування демпфера і місце прикладання сил, що збуджують.

5. Результати виконаного автором експериментального дослідження коливань балки з демпфером в'язкого тертя знаходяться в досить хорошій відповідності до теоретичних передбачень.

#### 4.5. Список використаних джерел у розділі 4

У розділі 4 використані джерела [52]. Їх найменування представлені у загальному списку використаних джерел.

## РОЗДІЛ 5.

### ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО З ДИНАМІЧНИМИ ГАСНИКАМИ КОЛИВАНЬ

Як видно з отриманого в розділі 2 рішення, динаміка в'язкопружної БТ визначається параметрами відносної довжини  $L/r_0$ , зсувної піддатливості  $\chi$ , внутрішнього в'язкого тертя  $\mu^*$ , а також параметрами ДГК - відносною масою  $m_a^*$ , параметром налаштування  $\omega_a^*/p_1$ , параметром в'язкого тертя  $\beta_a^*$  і абсциссой  $\xi_d$  перетину, в якому розташований ДГК. Деякі з цих параметрів зазвичай задані ( $L/r_0$ ,  $\chi$ ,  $\mu^*$ ), інші ж можна варіювати в деяких діапазонах для досягнення бажаних динамічних характеристик.

У чисельному аналізі були розглянуті:

- Вплив параметрів балки і ДГК на амплітудно-частотні характеристики (в рамках одномодового наближення);
- Вплив розташування гасника на якісну картину вимушених коливань.

Аналіз проводився для двох випадків ГУ: (1) двухопорна шарнірна балка і (2) консольна балка.

#### 5.1. Шарнірно закріплена балка

У загальному випадку коливання розглядалися для в'язкопружної шарнірно закріпленої балки Тимошенко, в деякому перетині  $\xi_p$  якої діє зосереджена гармонійна сила  $P$  з частотою  $\Omega$ , а в перетині  $\xi_d$  розташований динамічний гасник коливань (Рис. 5.1).

Були розглянуті шарнірно закріплені балки з параметрами  $L/r_0 = 10-50$ ,  $\chi = 0$  (моделі Релея і Ейлера-Бернуллі),  $\chi = 3$  (балка з ізотропного матеріалу з поперечним перерізом, близьким до прямокутного) і  $\chi = 10$  (висока зсувна піддатливість або поперечний переріз типу двотавру).

Гасник коливань з базовими параметрами  $m_a^* = 0.1$ ,  $\omega_a^* / p_1 = 1$  і  $\beta_a^* = 0.2$  розміщувався, як правило, в середньому перерізі балки (якщо інше розташування не було обумовлене).

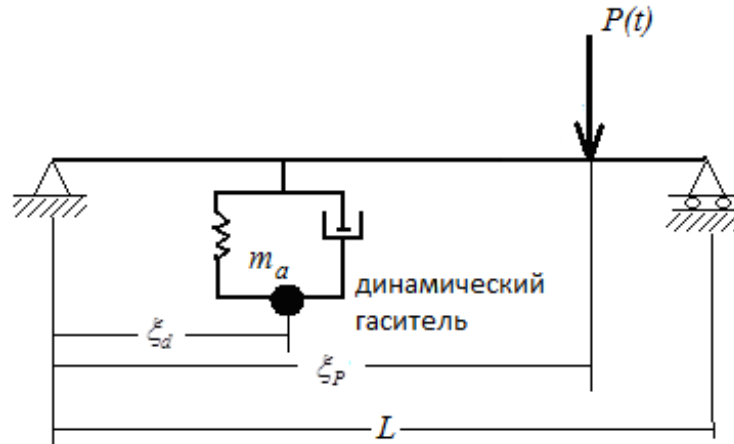


Рисунок 5.1 - В'язкопружна шарнірна балка Тимошенко з динамічним гасником коливань і зосередженою гармонійною силою

### 5.1.1. Вплив динамічного гасника коливань на власні частоти в'язкопружної балки Тимошенко

Спочатку було розглянуто вплив ДГК на власні коливання БТ з врахуванням виразів (3.25 – 3.26) і (2.74). В Таблиці 5.1 наведені дві нижні нормалізовані власні частоти (комплексні) для трьох значень параметра  $L/r_0$  і двох значень параметра  $\chi$ :  $\chi = 0$  і  $\chi = 3$  (БТ).

Таблиця 5.1. Дві нижні нормалізовані власні частоти  $\omega^* / p_1$  в'язкопружної балки ( $\mu^* = 0.2$ ,  $\chi = 0$  і  $\chi = 3$ ) з ДГК ( $m_a^* = 0.1$ ,  $\omega_a^* / p_1 = 1$ ,  $\beta_a^* = 0.2$ ) для трьох значень  $L/r_0$ .

$L/r_0$	50	30	10
$\omega_1^* / p_1$	0.9634+I 0.0937	0.9530+I 0.0917	0.9043+I 0.0825
	1.0256+I 0.1063	1.0332+I 0.1079	1.0447+I 0.1104

$(\chi = 0)$			
$\omega_1^* / p_1$	0.9603+I 0.0931	0.9441+I 0.0899	0.8258+I 0.0687
$(\chi = 3)$	1.0230+I 0.1058	1.0267+I 0.1066	1.0242+I 0.1060

При відсутності гасника дійсна частина комплексної власної частоти (тобто нормалізована циклічна частота) дорівнює 1 для довгих балок і менше 1 - для коротких. Постановка ДГК призводить до «роздвоєння» власної частоти, так як з'являється додатковий ступінь свободи (коливання гасника відносно балки). Для коливань гасника «у фазі» з балкою (або з малою різницею фаз) циклічна частота зменшується, при коливаннях в протифазі (або зі зсувом фаз, близьким до  $\pi$ ) частота збільшується. Уявна частина комплексної частоти (показник демпфування) дещо більше для коливань з різницею фаз, близькою до  $\pi$  (так як відносна швидкість гасника для коливань в протифазі вище, ніж для коливань в фазі).

### 5.1.2. Вплив параметрів балки і гасника на амплітудно-частотні характеристики при вимушених коливаннях.

Спочатку був розглянутий випадок розташування зосередженої гармонійної сили і ДГК посередині прольоту балки ( $\xi_p = \xi_d = L/2r_0$ ), коли достатньо одномодового наближення, як було показано в п. 5.1.

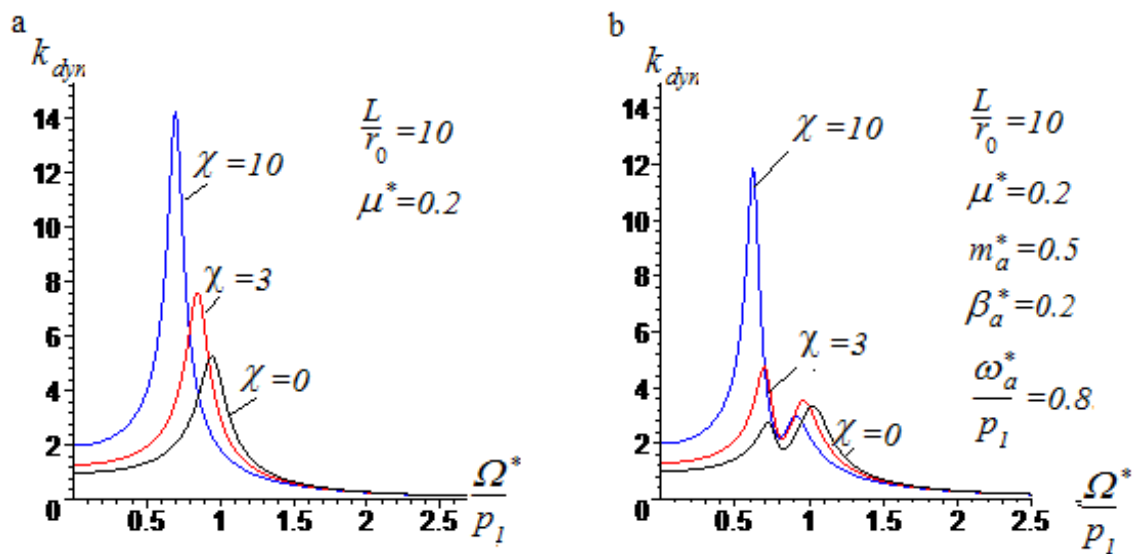


Рисунок 5.2 - АЧХ в'язкопружної БТ ( $L/r_0=10$ ,  $\mu^*=0.2$ ) для трьох значень параметра  $\chi$ ; (а) балка без ДГК, (б) балка з ДГК ( $m_a^*=0.5$ ,  $\beta_a^*=0.2$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.8$ )

На Рис. 5.2 наведені АЧХ при  $L/r_0=10$ ,  $\mu^*=0.2$  для трьох значень  $\chi$  балки без ДГК (а) і з ДГК (б) з параметрами  $m_a^*=0.5$ ,  $\beta_a^*=0.2$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.8$  (при виборі налаштування гасника було враховано вплив гасника на власні частоти).

Як бачимо із Рис. 5.2 (а), збільшення  $\chi$  призводить до збільшення максимуму і зміщення його вліво. Для балки з ДГК існують два локальних максимуми (поява другого обумовлена додатковим ступенем свободи, пов'язаної з ДГК). Ефективність ДГК істотно залежить від значення параметра  $\chi$ , і в моделі Тимошенко амплітуди коливань виявляються вищими, ніж в моделях Е-Б і Релея.

*Вплив параметра в'язкого тертя гасника.* На Рис. 5.3, а-ф, побудовані АЧХ для в'язкопружної балки Релея ( $L/r_0=10$ ,  $\mu^*=0.1$ ) при різних значеннях параметра тертя в гаснику  $\beta_a^*$ , Рис. 5.3, а - для балки без ДГК, інші графіки (b-f) для балки с гасником ( $m_a^*=0.5$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.9$ ) при різних значеннях параметра  $\beta_a^*$ , від  $\beta_a^*=0.06$  до  $\beta_a^*=0.5$ .

При малому терті ( $\beta_a^*=0.06$ ,  $0.2$ , графіки b, c) АЧХ мають два явно виражених максимуми, але зі збільшенням  $\beta_a^*$  вони зливаються в один максимум (графіки d, e). Таким чином, в'язке тертя в гаснику (так само, як і внутрішнє тертя в балці) може привести до злиття двох максимумів в один. Максимум АЧХ має найменше значення в діапазоні  $\beta_a^*=0.3 - 0.4$  для обраного набору решти параметрів (балки і гасника).

Подальше збільшення параметра  $\beta_a^*$  призводить до монотонного зростання амплітуд. Така залежність коефіцієнта динамічності від параметра в'язкого тертя в системах з двома ступенями свободи добре відома (Тимошенко [52]), але в цьому випадку представляє інтерес оптимальне значення  $\beta_a^*$ , так само, як і кількісний

ефект ДГК (зменшення амплітуд приблизно в 2.7 рази при параметрі маси  $m_a^* = 0.5$  (порівнюючи (a) і (d)).

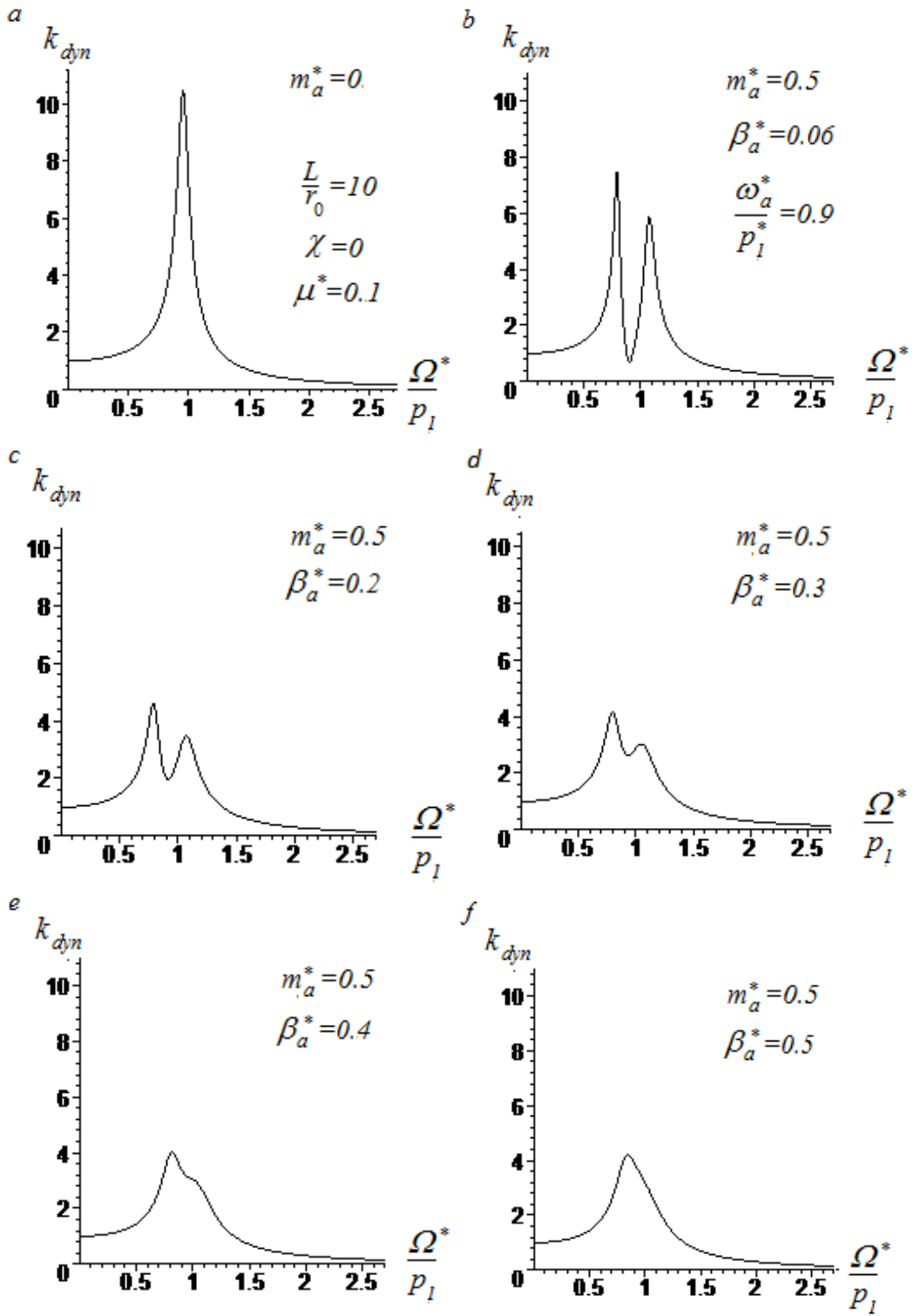
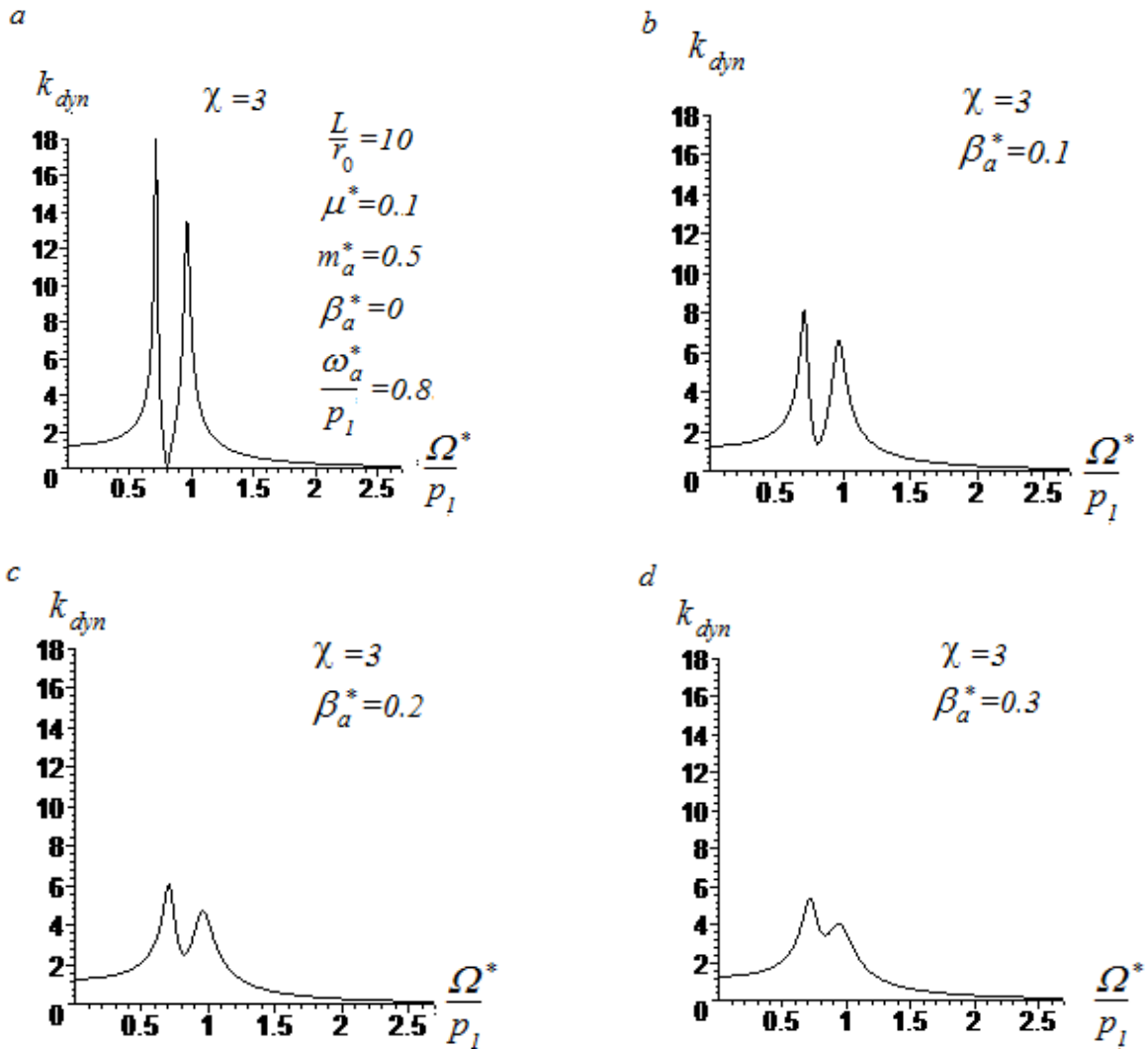


Рисунок 5.3 - Вплив параметра в'язкого тертя в гаснику  $\beta_a^*$  на АЧХ в'язкопружної

балки Релея ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=0$ ,  $\mu^*=0.1$ ;  $m_a^*=0.5$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.9$ );

(а) балка без ДГК, (b)  $\beta_a^*=0.06$ , (c)  $\beta_a^*=0.2$ , (d)  $\beta_a^*=0.3$ , (e)  $\beta_a^*=0.4$ , (f)  $\beta_a^*=0.5$

На Рис. 5.4, а-f, наведені результати аналогічних розрахунків для БТ при  $\chi=3$ .





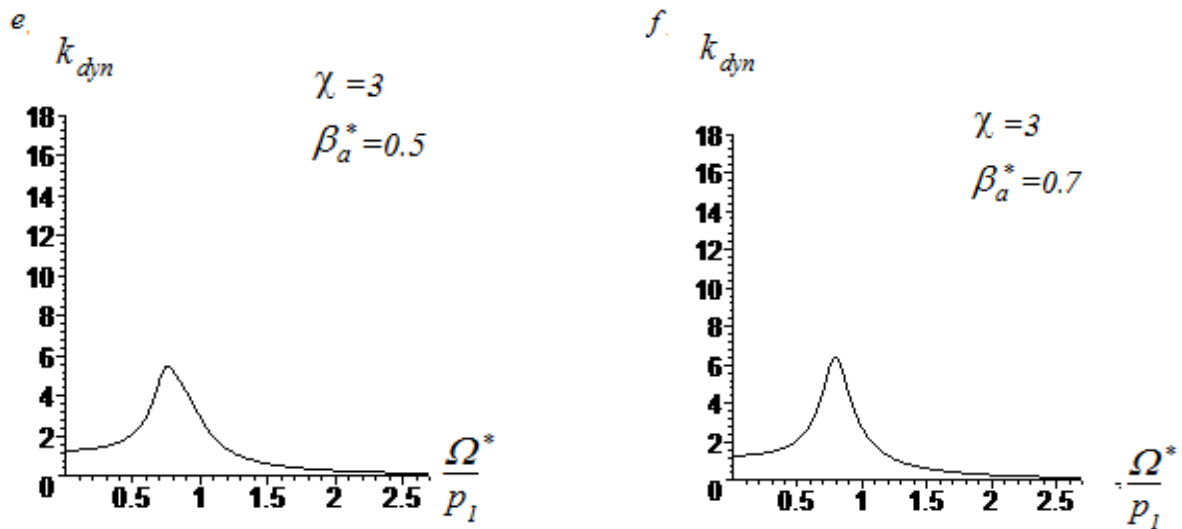


Рисунок 5.4 - Вплив параметра в'язкого тертя гасника  $\beta_a^*$  на АЧХ в'язкопружної балки Тимошенко ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\mu^*=0.1$ ;  $m_a^*=0.5$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.8$ ); (а)  $\beta_a^*=0$ , (б)  $\beta_a^*=0.1$ , (с)  $\beta_a^*=0.2$ , (д)  $\beta_a^*=0.3$ , (е)  $\beta_a^*=0.5$ , (ф)  $\beta_a^*=0.7$

Якісно залежності коефіцієнта динамічності від параметра в'язкого тертя для балки Тимошенко подібні отриманим вище для балки Релея і Ейлера-Бернуллі, але є кількісні відмінності. Тут значення максимумів  $k_{dyn}$  зростають (в порівнянні з випадком  $\chi=0$ ), а їх абсциса зміщується в бік зменшення (мінімум же досягається в діапазоні  $\beta_a^*=0.3-0.5$ ). Ефект гасника приблизно однаковий - зменшення  $k_{dyn}$  в приблизно 2.5 рази для  $m_a^*=0.5$  при оптимальному  $\beta_a^*$  (порівнюючи Рис. 5.2, б і Рис. 5.4, е).

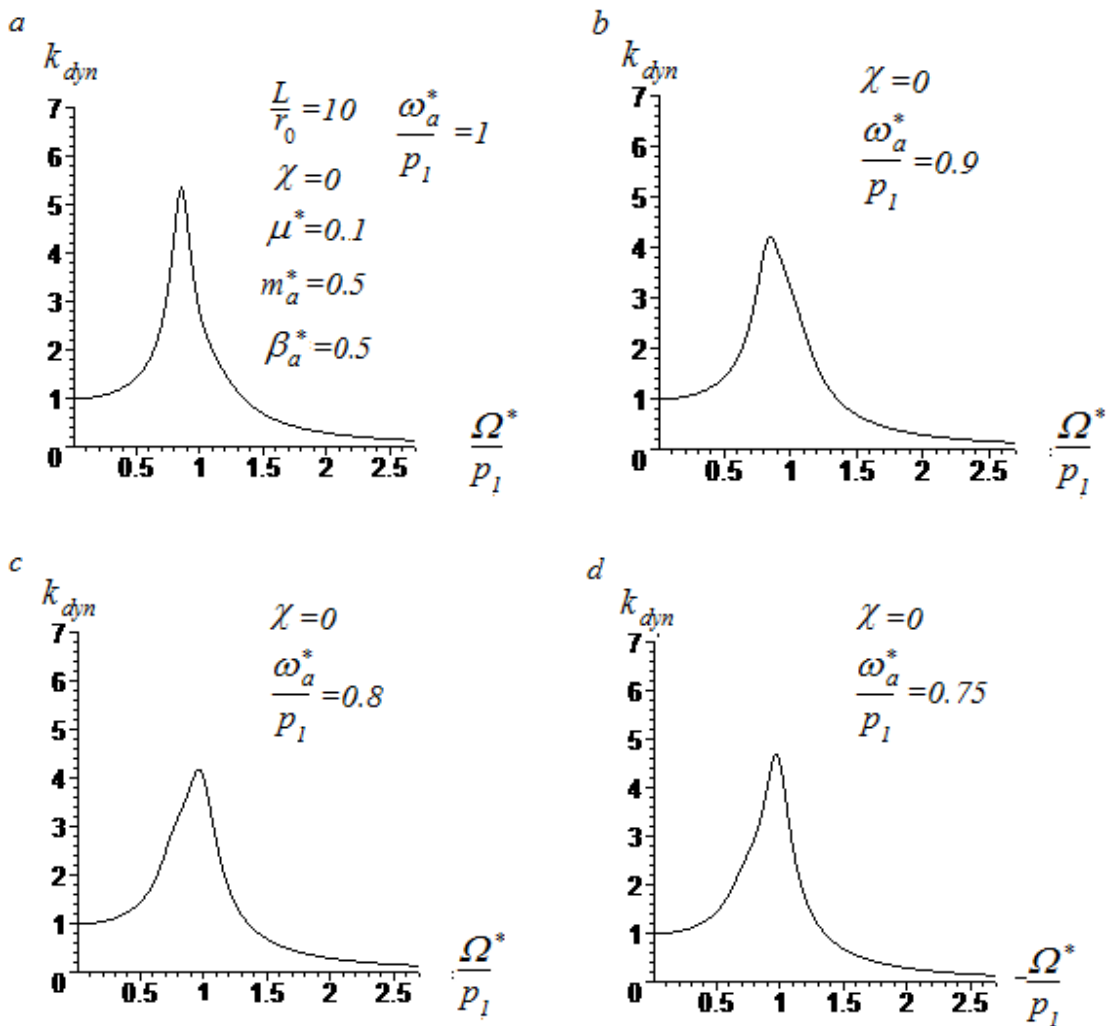


Рисунок 5.5 - Вплив параметра налаштування  $\omega_a^*/p_1^*$  на АЧХ балки Релея

( $\chi=0$ ,  $L/r_0=10$ ,  $\mu^*=0.1$ ,  $m_a^*=0.5$ ,  $\beta_a^*=0.25$ ); (a)  $\omega_a^*/p_1=1$ , (b)  $\omega_a^*/p_1=0.9$ ,  
(c)  $\omega_a^*/p_1=0.8$ , (d)  $\omega_a^*/p_1=0.75$

Рис. 5.5 і Рис. 5.6 ілюструють вплив параметра налаштування гасника  $\omega_a^*/p_1$  на  $k_{dyn}$  ( $L/r_0=10$ ,  $\mu^*=0.1$ ,  $m_a^*=0.5$ ,  $\beta_a^*=0.5$ ): Рис. 5.5 – для балки Релея ( $\chi=0$ ); Рис. 5.6 – для БТ ( $\chi=3$ ).

Наведено АЧХ для декількох значень  $\omega_a^*/p_1$  (від 1 до 0.75). Для  $\chi=0$  мінімальне значення  $k_{dyn}$  досягається при  $\omega_a^*/p_1=0.8 - 0.9$ . Це обумовлено наявністю внутрішнього тертя в балці і ДГК, яке призводить до зниження власних частот на 10-20% (для обраних параметрів балки і гасника).

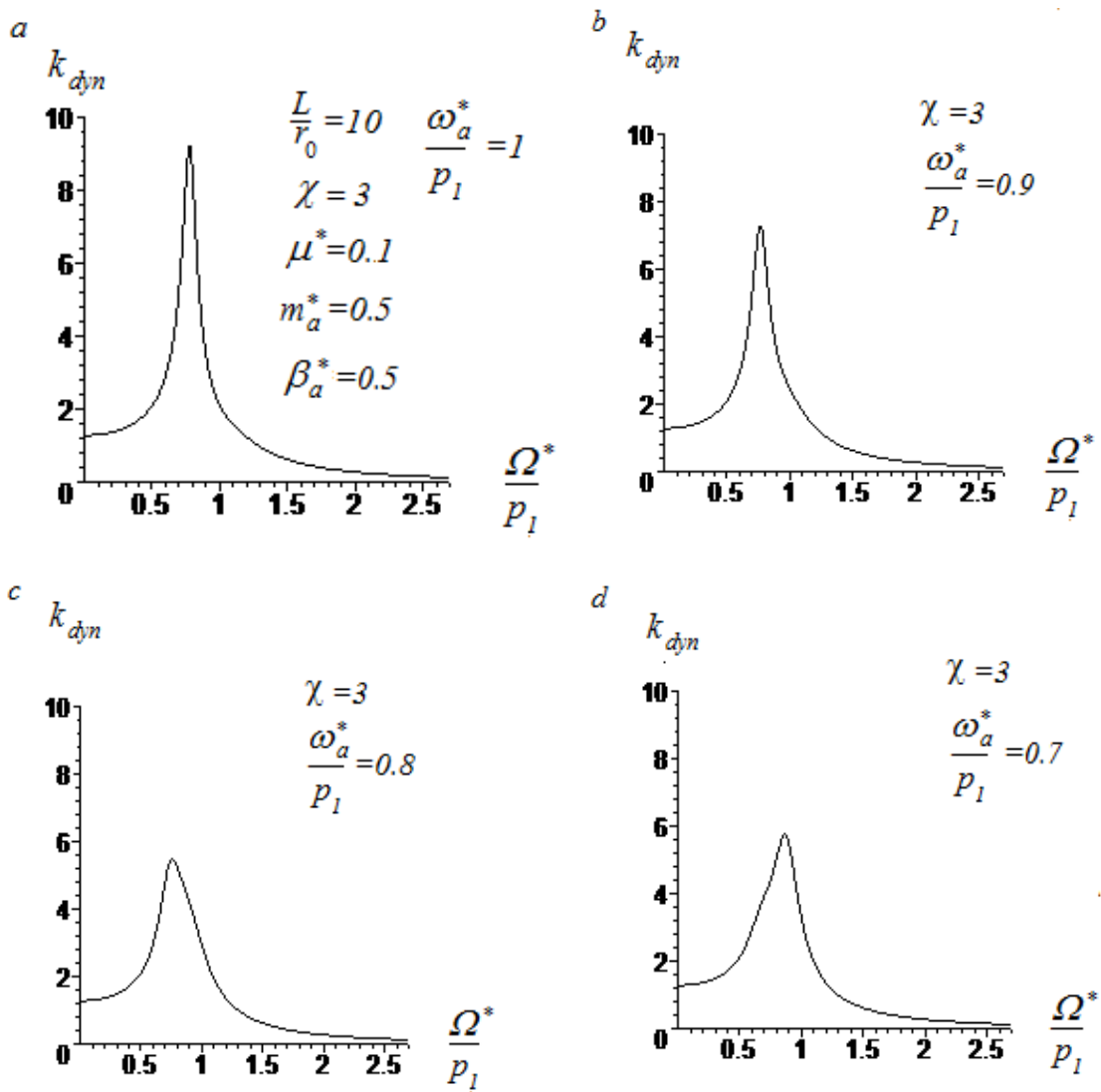


Рисунок 5.6 - Вплив параметра налаштування гасника  $\omega_a^*/p_1^*$  на АЧХ балки Тимошенко ( $\chi = 3$ ,  $L/r_0 = 10$ ,  $\mu^* = 0.1$ ,  $m_a^* = 0.5$ ,  $\beta_a^* = 0.5$ ); (a)  $\omega_a^*/p_1 = 1$ , (b)  $\omega_a^*/p_1 = 0.9$ , (c)  $\omega_a^*/p_1 = 0.8$ , (d)  $\omega_a^*/p_1 = 0.7$

Для балки Тимошенко при  $\chi = 3$  (Рис. 5.6) мінімальне значення  $k_{dyn}$  досягається в діапазоні  $\omega_a^*/p_1 = 0.8 - 0.85$  (що можна пояснити додатковим впливом параметра  $\chi$  на власні частоти).

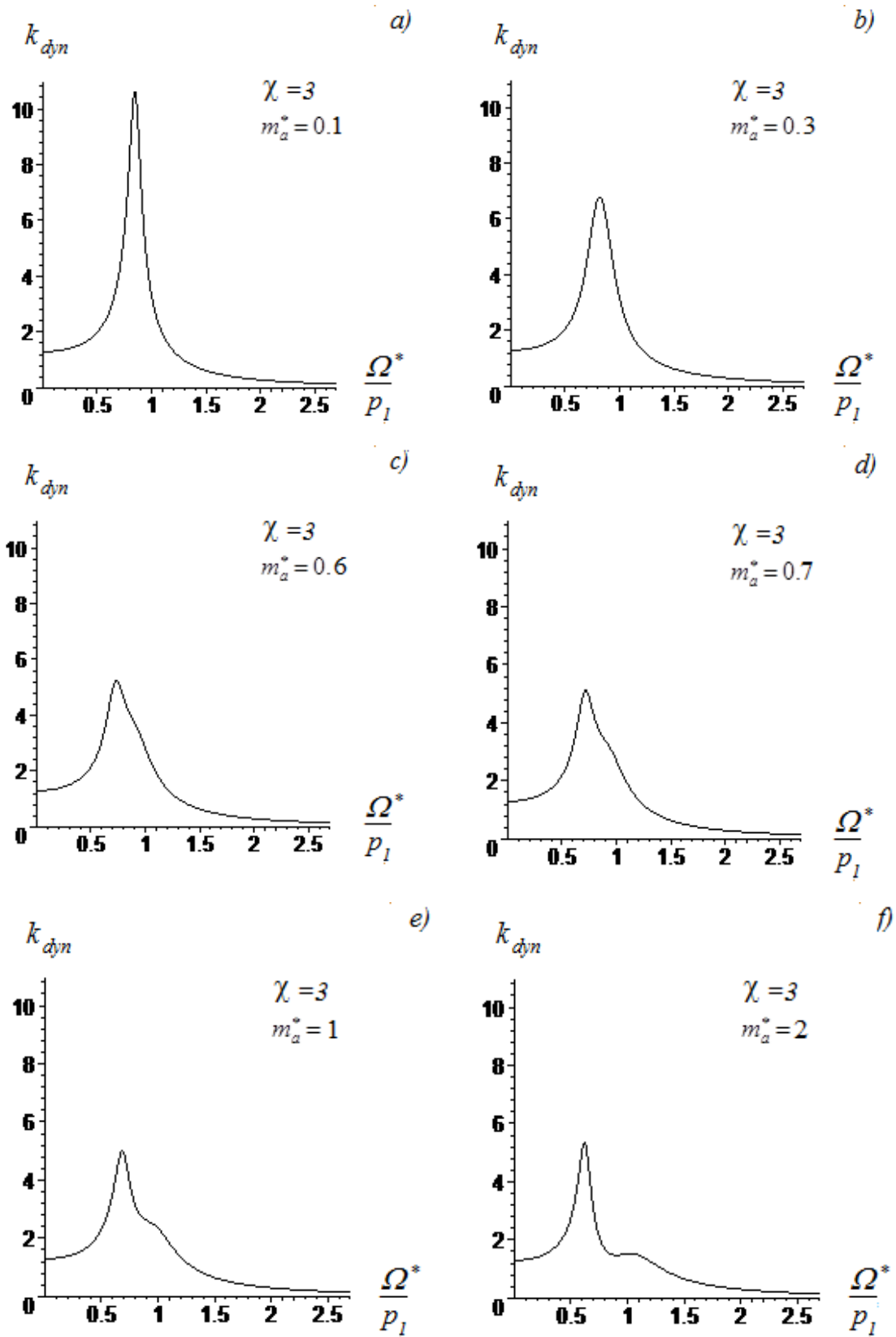


Рисунок 5.7 - Вплив параметра маси гасника  $m_a^*$  на АЧХ балки Тимошенко

На Рис. 5.7 наведені АЧХ для наступного набору параметрів балки та гасника ( $\chi = 3$ ,  $L/r_0 = 10$ ,  $\mu^* = 0.1$ ,  $\omega_a^*/p_1 = 0.8$ ,  $\beta_a^* = 0.5$ ); (a)  $m_a^* = 0.1$ , (b)  $m_a^* = 0.3$ , (c)  $m_a^* = 0.6$ , (d)

$m_a^* = 0.7$ , (e)  $m_a^* = 1$ , (f)  $m_a^* = 2$ . Як і для раніше розглянутих параметрів гасника, тут можна говорити про існування деякого оптимального діапазону значень для даного набору параметрів. Мінімальне значення  $k_{dyn}$  досягається в діапазоні  $m_a^* = 0.5 \div 1$ . Відзначимо, що вибір параметра маси часто диктується економічними міркуваннями.

### 5.1.3. Врахування декількох мод. Форми коливань. Рухомі хвилі.

Потім були взяті перші три форми в розкладанні (2.30). Приймалися наступні параметри балки і гасника:  $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\mu^* = 0.2$ ,  $\beta_a^* = 0.2$ ,  $\omega_a^* / p_1 = 0.8$ . Нормалізована амплітуда зосередженої сили прийнята рівною  $P_0 = p_1^{*2}$ , параметр маси дорівнює  $m_a^* = 1$ . Сила діє в середньому перерізі балки ( $x_p / L = 0.5$ ), гасник розташований в тому ж перерізі або зміщений -  $x_d / L = 0.5$  або  $0.3$  (Рис. 5.8, a, b).

При симетричному розташуванні ДГК (Рис. 5.8, a) і частоті збудження  $\tilde{\Omega} = 0.8$  (приблизно відповідає максимуму на АЧХ) були отримані наступні комплексні амплітуди:  $\zeta_1 = 0.3240 + i 0.7468$ ,  $\zeta_3 = 0.0020 - i 0.0055$  ( $\zeta_2 = 0$ ); в одномодовому наближенні було  $\zeta_1 = 0.3230 + i 0.7534$ , тобто трьохмодове наближення дає лише незначне уточнення рішення, і можна обмежитися обліком тільки першого доданку в розкладанні прогину.

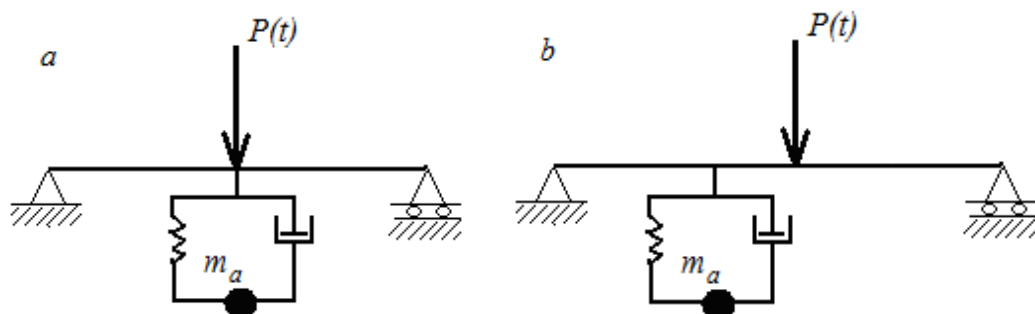


Рисунок 5.8 - Симетричне та асиметричне розташування гасника

При асиметричному розташуванні сили і / або ДГК (Рис. 5.8, b) розбіжності між даними рішеннями стають більш виражені. На Рис. 5.9, a, b, функції  $Y_r(x/L)$  і

$Y_i(x/L)$  (2.40) наведені для (a)  $x_p/L=0.5$ ,  $x_d/L=0.5$ ; і (b)  $x_p/L=0.5$ ,  $x_d/L=0.3$  (ДГК зміщений).

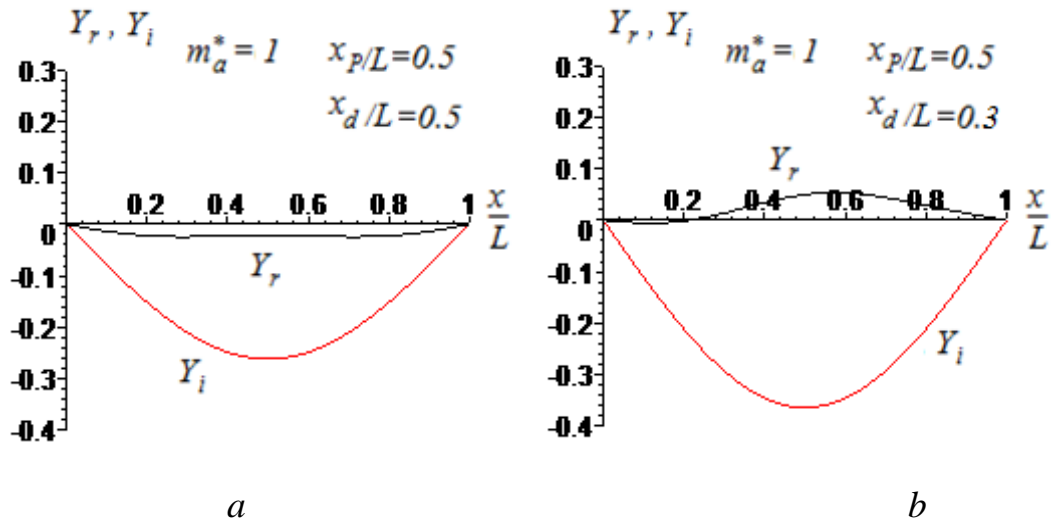


Рисунок 5.9 - Функції  $Y_r(x/L)$  і  $Y_i(x/L)$  ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\mu^*=0.2$ ,  $\beta_a^*=0.2$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.8$ ,  $\tilde{\Omega}=0.8$ ); (a) сила і ДГК – в середньому перерізі балки; (b)  $x_p/L=0.5$ ,  $x_d/L=0.3$

У разі асиметричного розташування гасника (Рис. 5.9, b) функції  $Y_r(x/L)$  і  $Y_i(x/L)$  також асиметричні, і їх комбінація (з різними функціями часу) визначає асиметричний динамічний відгук балки.

На Рис. 5.10 динамічний прогин  $Y(x/L, t)$  наведено для восьми рівновіддалених моментів часу (за один період коливань):  $\Omega^*t=0$ ;  $\pi/4$ ;  $\pi/2$ ;  $3\pi/4$  ...,  $7\pi/4$  для випадків (a) і (b). Як і у випадку демпфера в'язкого тертя (Рис. 4.6), бачимо, що асиметричне розташування гасника призводить до того, що динамічний прогин представляє собою накладення стоячої і рухомої хвиль, при цьому ефективність гасника зменшується і амплітуди коливань збільшуються.

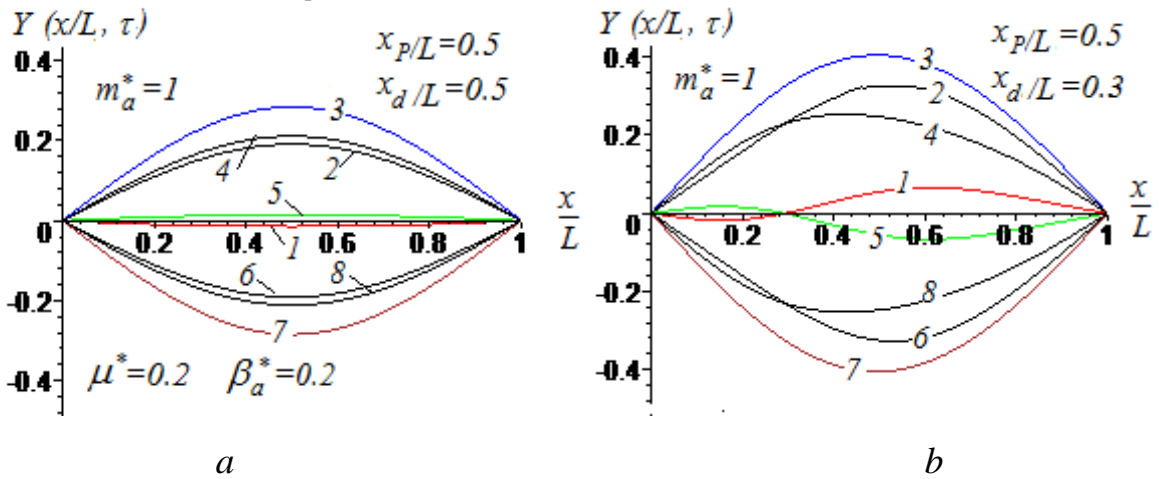


Рисунок 5.10 - Динамічний прогин балки  $Y(x/L, t)$  з ДГК ( $m_a^* = 1$ ) для 8 м-в часу, криві 1-8; 1)  $\Omega^* \tau = 0$ ; 2)  $\Omega^* \tau = \pi/4$ ; 3)  $\Omega^* \tau = \pi/2$ ; 4)  $\Omega^* \tau = 3\pi/4$ , 5)  $\Omega^* \tau = \pi$ ; 6)  $\Omega^* \tau = 5\pi/4$ ; 7)  $\Omega^* \tau = 3\pi/2$ ; 8)  $\Omega^* \tau = 7\pi/4$ ; (a) сила та ДГК в центрі; (b) ДГК зміщений ( $x_d/L = 0.3$ )

Як зазначалося раніше, максимуми, їх абсциси, співвідношення між складовими динамічного прогину визначаються не тільки розташуванням гасника і сили, але також і частотою зовнішньої сили, масою гасника та іншими параметрами налаштування гасника, що і показано на Рис. 5.11.

На Рис. 5.11, a, b, представлені криві зігнутої осі балки ( $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\mu^* = 0.02$ ,  $\beta_a^* = 0.02$ ,  $m_a^* = 1$ ,  $x_p/L = 0.5$ ,  $x_d/L = 0.3$ ,  $\omega_a^*/p_1 = 0.8$ ) для двох значень нормалізованої частоти збуджуючої сили: (a)  $\tilde{\Omega} = 0.8$ ; (b)  $\tilde{\Omega} = 0.9$ . При  $\tilde{\Omega} = 0.8$  (гасник налаштований точно на частоту збудження) рухомі хвилі добре помітні; але вже при  $\tilde{\Omega} = 0.9$  коливання близькі до стоячій хвилі.

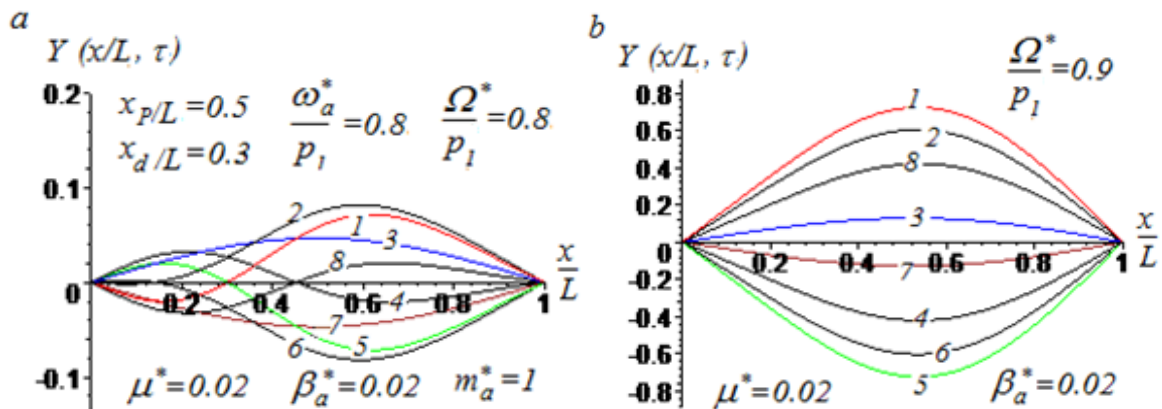


Рисунок 5.11 - Динамічний прогин  $Y(x/L, t)$  при асиметричному розташуванні ДГК для двох частот (a)  $\tilde{\Omega} = 0.8$ ; (b)  $\tilde{\Omega} = 0.9$ .

Криві 1-8 відповідають восьми рівновіддалених моментів часу 1)  $\Omega^*\tau=0$ ; 2)  $\Omega^*\tau=\pi/4$ ; 3)  $\Omega^*\tau=\pi/2$ ; 4)  $\Omega^*\tau=3\pi/4$ , 5)  $\Omega^*\tau=\pi$ ; 6)  $\Omega^*\tau=5\pi/4$ ; 7)  $\Omega^*\tau=3\pi/2$ ; 8)  $\Omega^*\tau=7\pi/4$ .

## 5.2. Консольна балка

У цьому параграфі розглянуті результати чисельного аналізу вимушених коливань *консольної* в'язкопружного БТ при дії розподіленого гармонійного навантаження, постійного по довжині. Ця задача може розглядатися як модельна при аналізі коливань башти при дії вітрового навантаження. На Рис. 5.12 показані балка без гасника коливання (*а*) і з гасником при різному його розташуванні (*б*, *в*). На балку діє розподілене гармонійне зовнішнє навантаження  $q(\xi, \tau)$ , постійне по довжині, з частотою  $\Omega$  (в часі  $\tau$ ).

$$q(\xi, \tau) = q_0 e^{i\Omega\tau}. \quad (5.1)$$

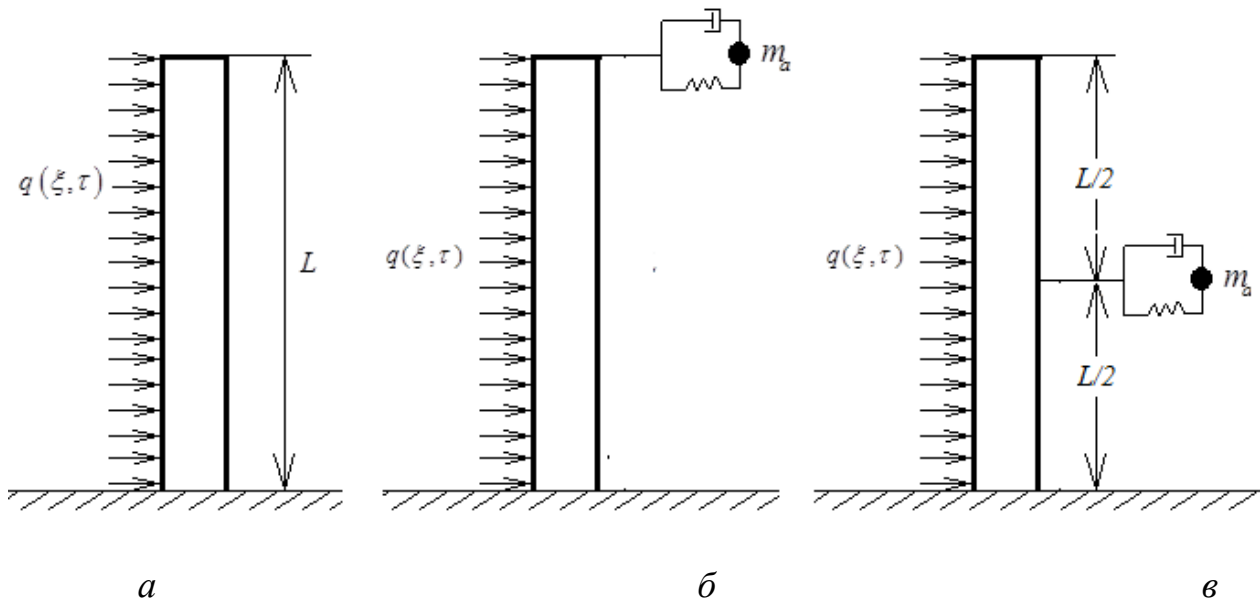


Рисунок 5.12 – Механічна модель - консольна в'язкопружна балка Тимошенко без гасника і з динамічним гасником коливань

Система рівнянь щодо узагальнених координат - коефіцієнтів розкладу  $\xi_k$  в розкладі за власними функціями (2.30)  $Y(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi)$  для в'язкопружної балки



Тимошенко з динамічним гасником коливань при дії зосередженої сили має вигляд (2.74). Коефіцієнт динамічності в одномодовому наближенні визначається формулою (2.75) і в разі рівномірного (по довжині) навантаження обчислюється як

$$k_{dyn} = \frac{a_1 p_1^2}{q_0 I(Y_1)} = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\Omega}^2 - m_a^* h_a \tilde{\Omega}^2 Y_1^2(\xi_d))^2 + \tilde{\Omega}^2 (\tilde{\mu}^* \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\beta})^2}}, \quad (5.2)$$

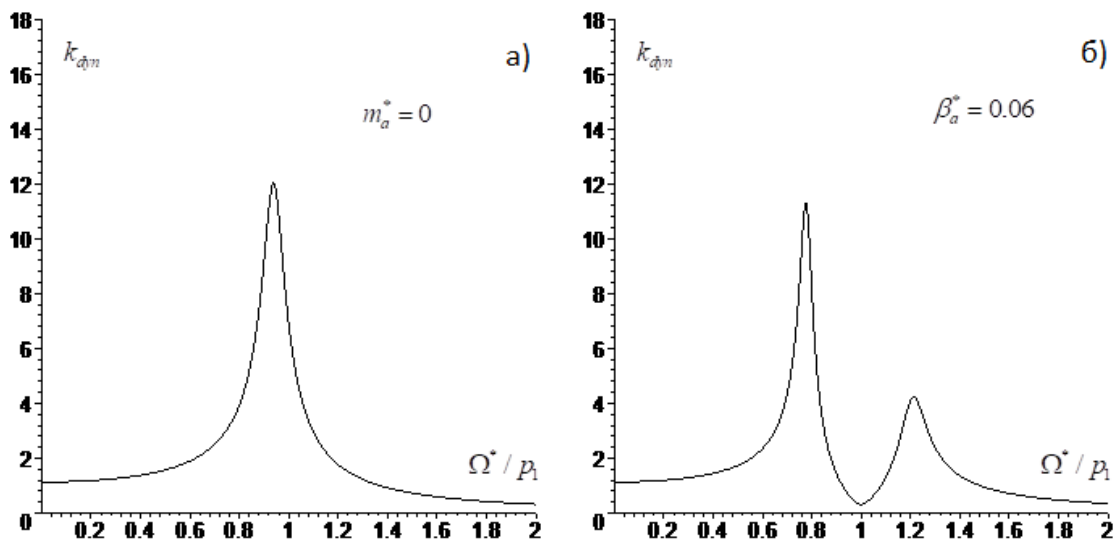
$$\text{де } I(Y_1) = \int_0^{l/r_0} Y_1 d\xi, \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 / p_1, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{p_1}, \quad m_a^* = \frac{m_a}{\rho A r_0}, \quad h_a = \frac{1 + i \beta_a^* \tilde{\Omega}}{1 - \tilde{\Omega}^2 + i \beta_a^* \tilde{\Omega}}, \quad \beta_a^* = \frac{\beta_a}{m_a \omega_a},$$

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_a} = \frac{\tilde{\Omega} p_1}{\omega_a}, \quad \omega_a^* = \omega_a \frac{r_0}{c}.$$

### 5.2.1. Амплітудно-частотні характеристики для вимушених коливань (одномодове наближення)

Аналіз впливу параметрів ДГК (параметра налаштування гасника  $\omega_a^* / p_1$ , параметра в'язкого тертя  $\beta_a^*$ ) і параметрів балки на амплітудно-частотні характеристики консольної і шарнірно закріпленої балок в рамках одномодового наближення показав, що в обох випадках відзначаються якісно схожі залежності. Однак є деякі кількісні відмінності, зупинимося на деяких з них.

Рис. 5.13 ілюструє вплив параметра в'язкого тертя в гаснику  $\beta_a^*$  на АЧХ консольної балки при  $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\omega_a^*/p_1=1$  і  $m_a^*=0.5$  для схеми розташування динамічного гасника, представленої на Рис. 5.12 (б).



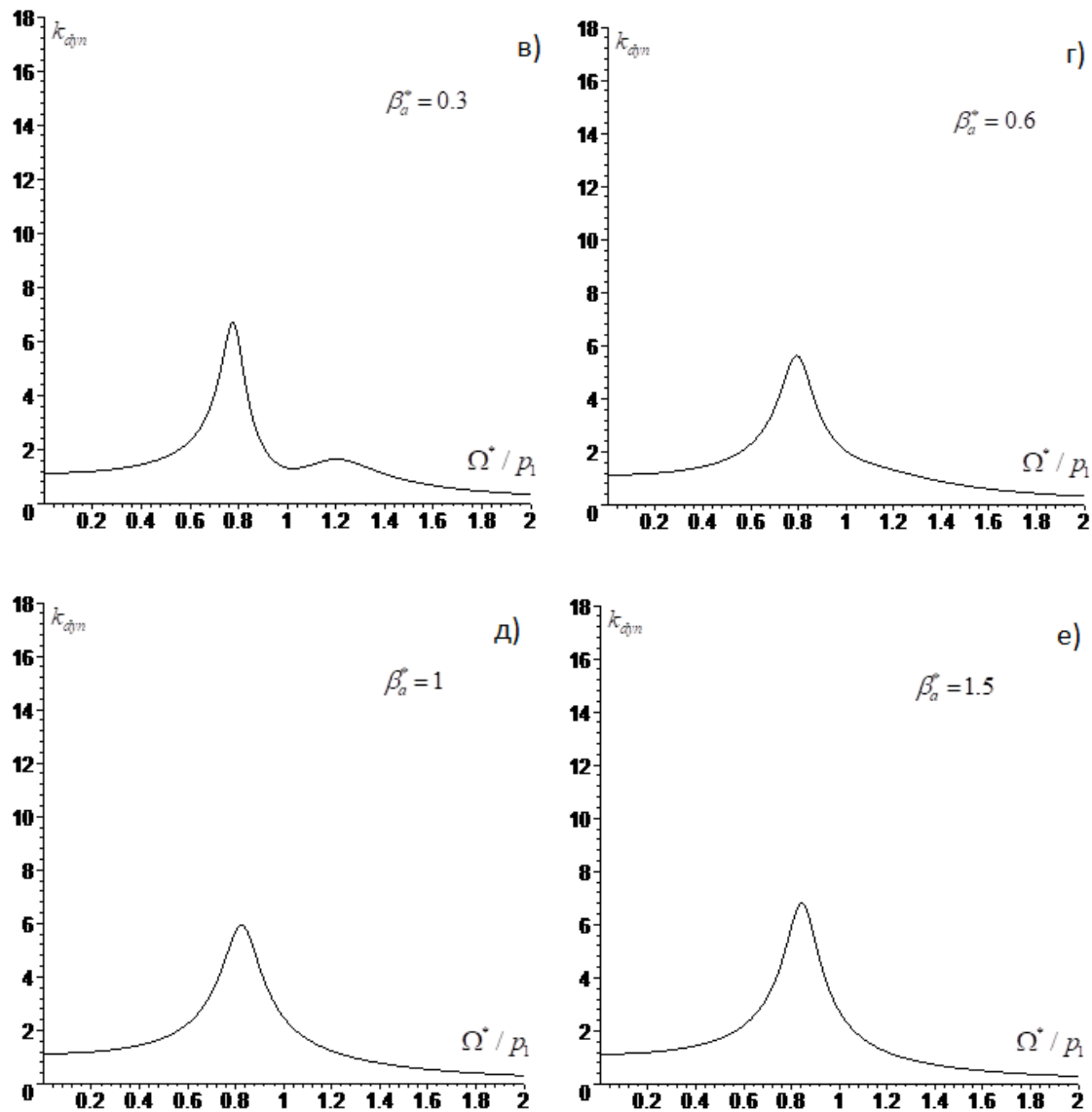


Рисунок 5.13 - Вплив параметра в'язкого тертя гасника  $\beta_a^*$  на АЧХ

в'язкопружної БТ ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\mu^*=0.1$ ;  $m_a^*=0.5$ ,  $\omega_a^*/p_1=1$ ); (a) без ДГК, (b)

$\beta_a^*=0.06$ , (c)  $\beta_a^*=0.3$ , (d)  $\beta_a^*=0.6$ , (e)  $\beta_a^*=1$ , (f)  $\beta_a^*=1.5$

Як бачимо з Рис. 5.13, вплив параметра в'язкого тертя  $\beta_a^*$  на АЧХ в'язкопружної консольної балки Тимошенко якісно подібний залежностям отриманим для шарнірно закріпленої балки Тимошенко (Рис. 5.4). Зі збільшенням значення коефіцієнта  $\beta_a^*$  пікові амплітуди АЧХ поступово знижуються і починаючи з деякого значення зливаються в один, подальше ж збільшення призводить до погіршення ефективності гасника, що веде до зростання амплітуд.

Діапазон оптимальних значень параметра  $\beta_a^*$  трохи вищий, ніж для шарнірно закріпленої балки -  $\beta_a^* = 0.4 \div 0.7$ .

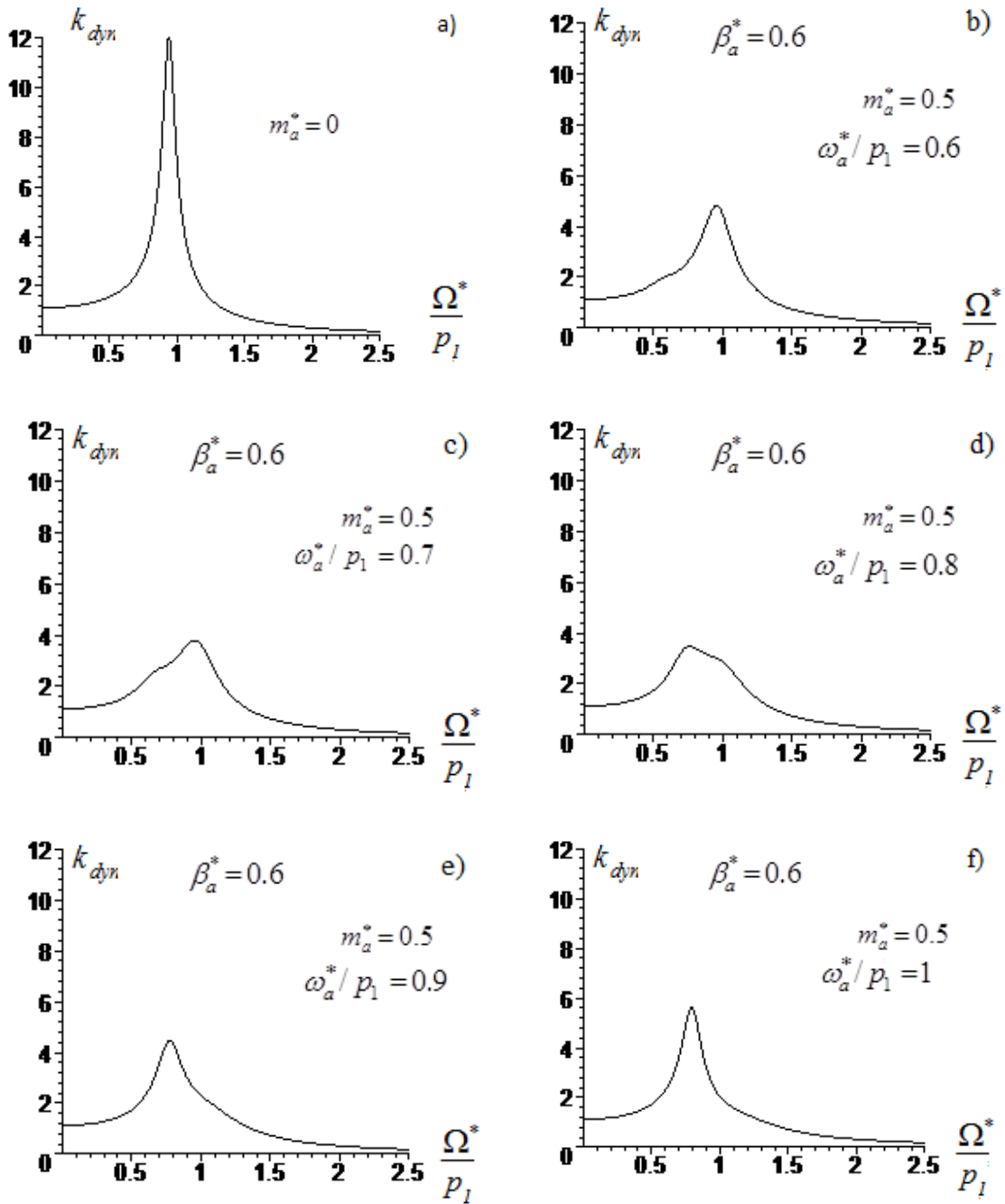


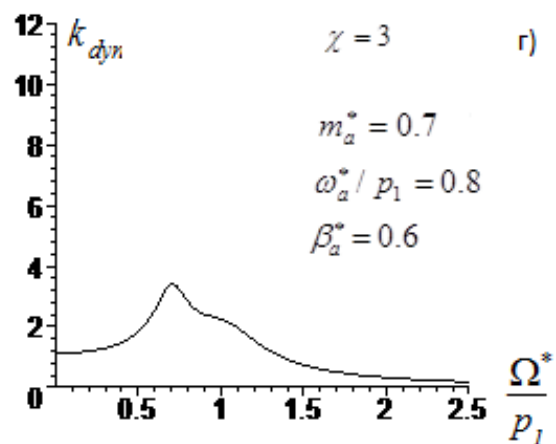
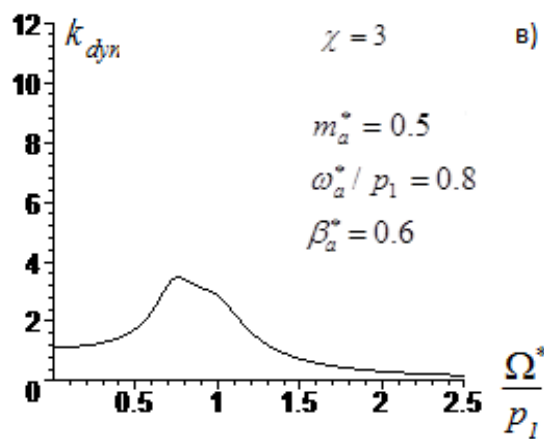
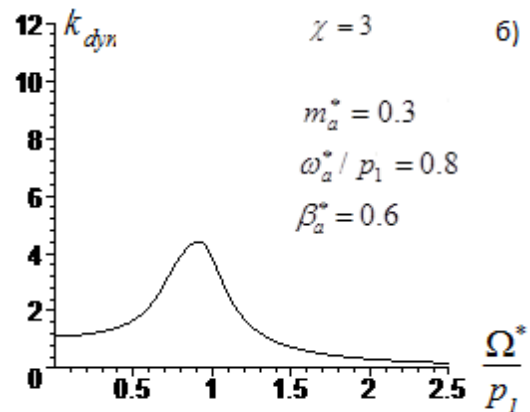
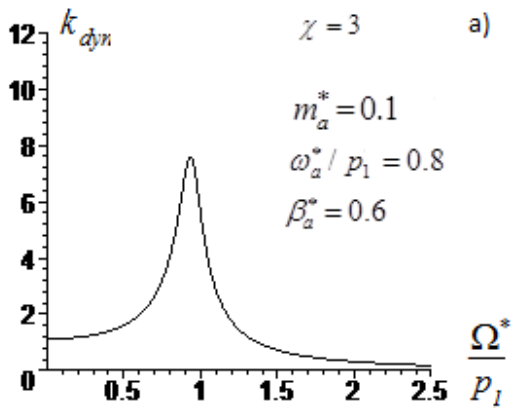
Рисунок 5.14 - Вплив параметра налаштування гасника  $\omega_a^*/p_1$  на АЧХ в'язкопружної БТ ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\mu^*=0.1$ ;  $m_a^*=0.5$ ,  $\beta_a^*=0.6$ ); (a) без ДГК, (b)  $\omega_a^*/p_1=0.6$ , (c)  $\omega_a^*/p_1=0.7$ , (d)  $\omega_a^*/p_1=0.8$ , (e)  $\omega_a^*/p_1=0.9$ , (f)  $\omega_a^*/p_1=1$

Рис. 5.14 ілюструє вплив параметра налаштування гасника  $\omega_a^*/p_1$  на АЧХ

консольної балки при  $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\beta_a^*=0.6$  и  $m_a^*=0.5$  для схеми розташування динамічного гасника, представленої на Рис.5.12 (б).

Як бачимо з вище представлених графіків, найбільший ефект гасіння відзначається в діапазоні  $\omega_a^*/p_1=0.7\div 0.8$ , що трохи нижче значень, отриманих для шарнірно-обпертих балки, при цьому ефективність гасника виявляється для консольної балки вищою. Для  $\omega_a^*/p_1^*=0.8$  гасник зменшує максимальні амплітуди приблизно в три рази.

Вплив параметра маси гасника  $m_a^*$  на АЧХ вивчалоя для тієї ж балки з параметрами ДГК  $\omega_a^*/p_1=0.8$ ,  $\beta_a^*=0.6$  (нагадаємо, що маса гасника нормалізується діленням на масу ділянки балки довжиною  $r_0$ , див. (2.10)). На Рис. 5.15 наведені АЧХ для декількох значень  $m_a^*$ , в діапазоні від 0.1 до 2.



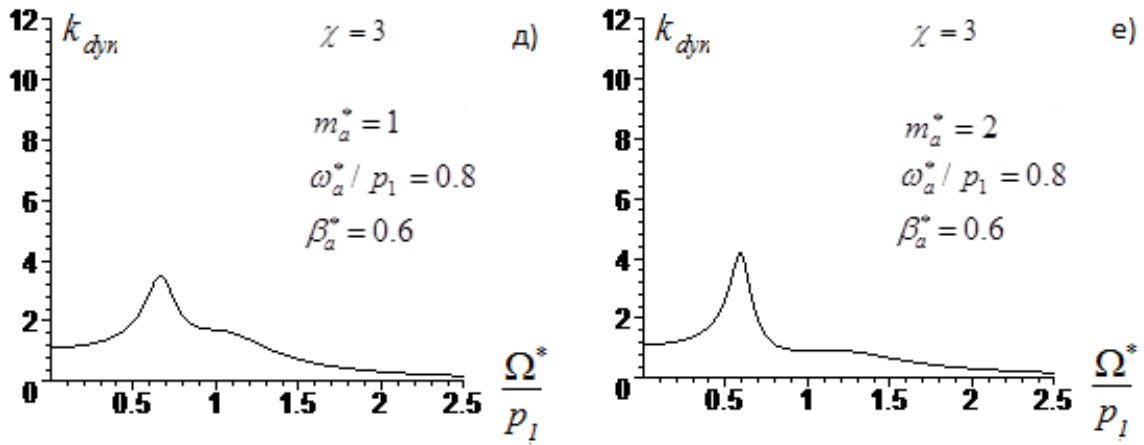


Рисунок 5.15 - Вплив параметра маси гасника  $m_a^*$  на АЧХ балки Тимошенко ( $\chi = 3$ ,  $L/r_0 = 10$ ,  $\mu^* = 0.1$ ,  $\omega_a^*/p_1 = 0.8$ ,  $\beta_a^* = 0.35$ ); (а)  $m_a^* = 0.1$ , (б)  $m_a^* = 0.3$ , (в)  $m_a^* = 0.5$ , (г)  $m_a^* = 0.7$ , (д)  $m_a^* = 1$ , (е)  $m_a^* = 2$

Тут також відзначається немонотонна залежність динамічного коефіцієнта  $k_{dyn}$  від  $m_a^*$ . Оптимальне значення  $m_a^*$  залежить від інших параметрів гасника, таких, як параметр налаштування гасника -  $\omega_a^*/p_1$ , параметр в'язкого тертя  $\beta_a^*$ . Як впливає з Рис. 5.15, найбільший ефект гасіння відзначається в діапазоні  $m_a^* = 0.5 \div 1$ , що збігається з результатами, отриманими для шарнірно закріпленої балки.

### 5.2.2. Вплив розташування гасника

Були розглянуті два випадки розташування гасника - на краї та в центрі балки, Рис. 5.12, б і в. Спочатку використовувалось одномодове наближення (Рис. 5.16).

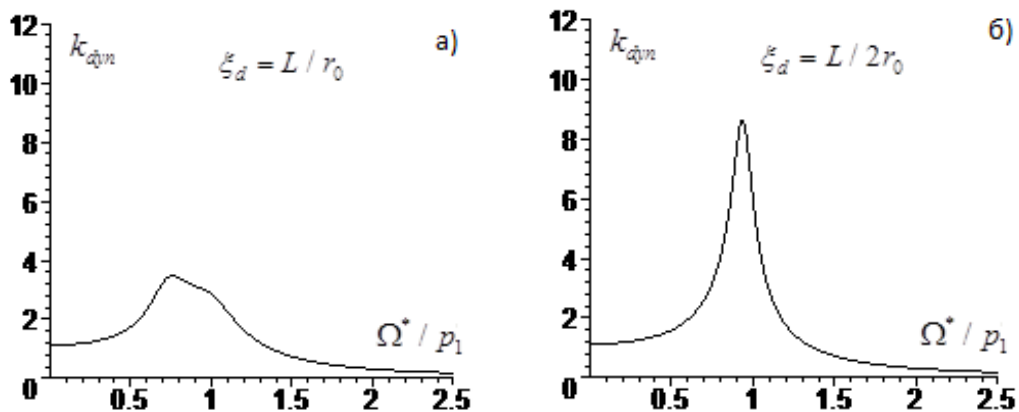


Рисунок 5.16 - АЧХ для двох випадків розташування БТ ( $L/r_0 = 10$ ,  $\chi = 3$ ,  $\mu^* = 0.1$ ) з ДГК ( $\beta_a^* = 0.6$ ,  $\omega_a^*/p_1 = 0.8$ ,  $m_a^* = 0.5$ ) на вільному краї (а) і в центрі балки (б)

На Рис. 5.16 для обраного раніше раціонального набору параметрів:  $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\mu^*=0.1$ ,  $\beta_a^*=0.6$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.8$ ,  $m_a^*=0.5$  побудовані АЧХ для цих двох випадків розташування гасника.

Як і слід було очікувати, максимальна ефективність гасника для консольної балки досягається при його розташуванні на краї балки. При перенесенні гасника в середній перетин балки максимальна амплітуда коливань зростає більш, ніж в два рази.

Потім та ж балка ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\mu^*=0.1$ ,  $\beta_a^*=0.6$ ,  $m_a^*=0.5$ ) з гасником на краї ( $\xi_d=L/r_0$ ) розглядалась в рамках трьохмодового наближення, для двох значень частоти збудження -  $\tilde{\Omega}=0.8$  і  $\tilde{\Omega}=5$  (що близько до 1-ї та 2-ї власних частот в'язкопружної балки з ДГК). Налаштування гасника (параметр  $\omega_a^*/p_k$ ) приймалася відповідно близькими до цих частот.

Форми коливань балки Тимошенко для двох значень частоти зовнішньої сили  $\tilde{\Omega}=0.8$  і  $\tilde{\Omega}=5$  наведені на Рис. 5.17, *а*, *б*, відповідно. Для  $\tilde{\Omega}=0.8$  приймалось налаштування  $\omega_a^*/p_1=0.8$ ; для значення  $\tilde{\Omega}=5$  (близького до другої власної частоти) -  $\omega_a^*/p_1=0.8(p_2/p_1)$ .

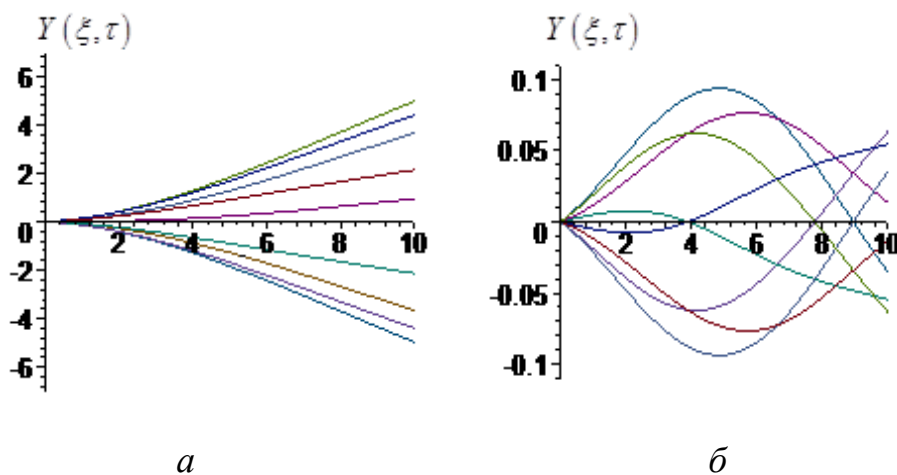


Рисунок 5.17 - Динамічний прогин  $Y(\xi, \tau)$  консольної балки з ДГК на краї ( $L/r_0=10$ ,  $\chi=3$ ,  $\mu^*=0.1$ ,  $\beta_a^*=0.6$ ,  $m_a^*=0.5$ ) для двох частот збудження; (а) -

$\tilde{\Omega}=0.8$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.8$ ; (б)  $\tilde{\Omega}=5$ ,  $\omega_a^*/p_1=0.8(p_2/p_1)$

Як і у випадку шарнірно закріпленої балки, в разі «низької» частоти  $\tilde{\Omega} = 0.8$  коливання балки близькі до стоячої волни коливання балки близькі до стоячої хвилі (Рис. 5.18, а), і тут трьохмодове рішення практично не відрізняється від одномодового рішення. Але при більш високій частоті збудження  $\tilde{\Omega} = 5$  (Рис. 5.17, б), близької до другої власної частоти, динамічний режим істотно відрізняється від стоячої хвилі, і компонента рухомої хвилі значно більш виражена, ніж в разі коливань балки без гасників. Одномодове рішення виявляється недостатнім для визначення динамічних переміщень та напружень.

Наведені в цьому і попередньому розділі дані дозволяють порівняти ефективність застосування демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників коливань в реальних балкових системах. Необхідного зниження амплітуд (в кілька разів), як зазвичай, можна досягти як за допомогою демпферів, забезпечуючи потрібний коефіцієнт в'язкого тертя в демпфері, так і застосовуючи динамічний гасник коливань з відповідним налаштуванням і тертям. ДГК ефективний у відносно вузькому діапазоні частот збудження, демпфер в'язкого тертя ефективно працює в широкому діапазоні частот. До того ж ДГК вимагає більшої обережності внаслідок появи додаткового ступеня свободи та потреби рахуватися з можливими великими амплітудами коливань самого гасника. Але, з іншого боку, ДГК надає більший набір параметрів для варіювання, він використовує для гасіння коливань і сили інерції, і сили тертя, і це робить його більш гнучким при виборі оптимальних параметрів.

Вибір того чи іншого варіанту залежить від можливості забезпечити необхідні параметри гасника або демпфера, а також від економічних і конструктивних міркувань.

### 5.3. Висновки по розділу 5

1. У чисельному аналізі вивчено вплив динамічних гасників на вимушені коливання шарнірно закріплених і консольних балок. Ефективність гасника істотно залежить від параметрів балки і гасника.

2. При виборі параметрів гасника необхідно враховувати наступні обставини:

- Зсувна податливість і внутрішнє тертя знижують власні частоти коливань балки.
- Постановка гасника у загальному випадку континуальної моделі призводить до появи другого резонансу в системі. Однак наявність в'язкого тертя в гаснику може згладити цей ефект і призвести до злиття двох близьких локальних максимумів, що відзначалось в роботах Д. Гартога [14]. Оптимальне значення коефіцієнта тертя в гаснику, як правило, відповідає мінімальному тертю, при якому досягається це злиття.

3. В розглянутих у роботі численних прикладах (параметр зсувної піддатливості  $\chi = 3$ , параметр внутрішнього тертя в балці  $\mu^* = 0.1$ ) були отримані наступні діапазони оптимальних безрозмірних параметрів гасника (для шарнірно закріплених і консольних балок):

- оптимальний параметр налаштування (відношення парціальних власних частот гасника і балки без урахування тертя) - в діапазоні  $\omega_a^* / p_1 = 0.8 - 0.85$ ;
- оптимальний параметр в'язкого тертя в гаснику - в діапазоні  $\beta_a^* = 0.3 - 0.5$ ;
- відносна маса гасника (нормалізована діленням на масу ділянки балки довжиною  $r_0$ ) - в діапазоні  $m_a^* = 0.5 \div 1$

4. При розрахунках в обраних безрозмірних параметрах граничні умови слабо впливають на оптимальні параметри, тому отримані в чисельних розрахунках діапазони оптимальних параметрів можуть служити орієнтирами також при інших ГУ.

5. Істотним виявляється також вибір точки прикріплення гасника. Вибір оптимального розташування повинен враховувати такі фактори, як граничні умови, характер застосування зовнішніх сил і їх частоти.

6. Постановка гасників коливань підсилює тенденцію до появи рухомих хвиль при вимушених коливаннях балок, особливо при дії локальних сил і зміщених щодо цих сил гасників. Рухома компонента динамічного прогину може



привести до істотних змін в кривизні зігнутої осі і відповідно у згинних напруженнях, що має братися до уваги при аналізі динамічних напружень і виборі параметрів ДГК.

#### **5.4. Список використаних джерел у розділі 5**

У розділі 5 використані джерела [52, 14]. Їх найменування представлені у загальному списку використаних джерел.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі зроблено теоретичне узагальнення і запропоновано нове рішення науково-практичної задачі проектування будівельних конструкцій, зокрема задачі розрахунку на динаміку та проектування мостових і баштових конструкцій. Задача розв'язувалась за допомогою побудови математичної моделі, для якої було отримано аналітичний розв'язок задачі про коливання балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань. Зазначена модель враховує зсувну податливість та внутрішнє і зовнішнє тертя. Виконані дослідження дозволяють зробити наступні висновки:

1. Побудована математична модель динаміки балки Тимошенко з в'язко-пружного матеріалу з приєднаними зосередженими масами, демпферами і динамічними гасниками коливань при дії довільного розподіленого навантаження  $q_0(x,t)$ , з використанням зручної системи безрозмірних змінних та параметрів. Отримано аналітичний розв'язок цієї задачі з використанням розкладу по власним функціям пружної балки Тимошенко без наведених зосереджених впливів, тобто задача зведена до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно узагальнених координат – коефіцієнтів вищезгаданого розкладу.

2. Проаналізована допоміжна задача про визначення власних частот і власних форм пружної балки Тимошенко, розв'язок якої є необхідним кроком розв'язку загальної задачі про вимушені коливання БТ з демпферами та ДГК. Досліджено форми власних коливань пружної балки, наведено їх порівняння в моделях Тимошенко та Ейлера-Бернуллі, проаналізовано співвідношення згинної та зсувної складових в залежності від коефіцієнта зсувної податливості  $\chi$ , виконано аналіз впливу коефіцієнта зсувної податливості  $\chi$  на власні частоти пружної балки. При розгляді допоміжної задачі, виконано аналіз власних частот в'язко-пружної балки Тимошенко, які є комплексними та визначають як циклічну частоту коливань, так і згасання власних коливань. Показано, що кожна власна частота в'язко-пружної БТ (з в'язким зовнішнім тертям) пов'язана з відповідною власною частотою пружної БТ простою аналітичною залежністю, що не залежить

від граничних умов.

3. Виконано аналіз вимушених коливань пружної балки Тимошенко (без демпферів та ДГК). Для в'язкопружної балки Тимошенко, так само як і для пружної, внесок власних форм більш високих порядків (вище першого) в динамічний прогин стає помітним при частотах збудження помітно перевищуючих першу власну частоту. Зсувна податливість призводить до зміщення резонансу в сторону менших частот і помітного зростання амплітуд при резонансі. У зарезонансній зоні вплив коефіцієнта зсувної податливості істотно зростає, а класична модель Ейлера-Бернуллі і модель Релея не дають адекватного опису вимушених коливань. В аналізі досліджено:

- вимушені коливання в'язко-пружної балки Тимошенко при дії гармонійного навантаження (без демпферів і ДГК). Показано, що динамічний прогин представляє собою накладання рухомих і стоячих хвиль, через різний зсув фаз компонент прогину, але рухома складова стає помітною лише при великих коефіцієнтах в'язкого тертя;

- сталі вимушені коливання в'язкопружної балки Тимошенко з демпфером в'язкого тертя при дії гармонійного навантаження. На прикладах шарнірно закріпленої та консольної балок вивчено вплив різних параметрів - коефіцієнта зсувної податливості  $\chi$  і параметрів демпфера (коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері  $\tilde{g}_f^*$  і місця його розташування) на форми і амплітуди коливань.

4. Вивчено вплив динамічних гасників на вимушені коливання шарнірно закріплених та консольних балок. Показано, що оптимальне значення коефіцієнта тертя в гасниках пов'язане з «розщепленням» власних частот при установці ДГК. При певному значенні коефіцієнта в'язкого тертя в гаснику відбувається злиття двох близьких локальних максимумів, і саме це значення коефіцієнта тертя в гасниках є оптимальним. У розглянутих в роботі чисельних прикладах отримані діапазони раціональних безрозмірних параметрів гасника (для шарнірно закріплених та консольних балок). Показано, що постановка демпферів і динамічних гасників коливань підсилює тенденцію до появи рухомих хвиль при

вимушених коливаннях балок, особливо при дії локальних сил і зміщених щодо цих сил гасників. Рухома компонента істотно залежить від розташування демпфера або гасника і зростає зі збільшенням частоти збудження. Ця компонента динамічного прогину може привести до істотних змін в кривизні зігнутої осі і відповідно у згинних напруженнях, що має братися до уваги при аналізі динамічних напружень і виборі параметрів ДГК.

5. Результати виконаного автором експериментального дослідження коливань балки з демпфером в'язкого тертя знаходяться в достатній відповідності до теоретичних розрахунків.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем : учеб. пособие в 2-х т. Москва, 2015. 700 с.
2. Алексеев А. М., Сборовский А. К. Судовые виброгасители : монографія. Москва: Судпромгиз, 1962. 162 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний: навч. посібник. Москва: Наука, ГРФМЛ, 1968. 560 с.
4. Баргуев С. Г. Вынужденные колебания системы твердых тел, установленных на консольной балке с демпфированием *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. Минск, 2015. Вып.9. С. 31-39
5. Баргуев С. Г., Богданов А. С., Мижидон А. Д. Гашение колебаний упругого стержня *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика*. Минск, 2011. Вып.9. С. 218-223.
6. Бартел Д. Л., Краутер А. И. Оптимизация временных характеристик динамического поглотителя колебаний. *Тр. Амер. о-ва инж.-механиков Конструирование и технология машиностроения*. 1971. Т. 93. № 3. С. 34 - 39.
7. Беспрозванная И. М., Гоздек В. С., Луговцов А.Н., Фомин Г.М. О применении демпфирующих устройств для гашения автоколебаний высоких сооружений башенного типа. *Строит. механика и расчёт сооружений*. 1972. № 6. С. 40 - 43.
8. Брискин Е.С. О демпфировании колебаний одной группой динамических гасителей двух близко расположенных резонансных состояний механической системы. *Изв. вузов. Стр-во и архитектура*. 1980. № 12. С. 40-44.
9. Горошко О. А. Собственные и сопровождающие колебания в системе с подвижными инерционными нагрузками. Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям. Киев, 1970. С. 215 - 219.
10. Горошко О. А., Демьяненко А. Г., Киба С. П. Двухволновые процессы в механических системах : монографія. Киев : Лыбидь, 1991. 188 с.

11. Гришак В. З., Дьяченко Т. А. Нелинейный анализ динамики неоднородной механической системы с сосредоточенной массой. *Вісник Запорізького національного університету*. Запоріжжя, 2014. № 1. С. 24-34.
12. Демедецкая В. В. Свободные колебания вязкоупругой балки Тимошенко с динамическим гасителем колебаний и сосредоточенными массами. *Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка*. Дніпропетровськ, 2014. Вип. 18. Т. 2. №7. С. 66-80.
13. Демедецкая В. В., Маневич А. И., Пацюк А. Г. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 148-159.
14. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания : монография / пер. с английского А. Н. Обморщева. Москва : Физматгиз, 1960. 580 с.
15. Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций. Справочник проектировщика. / под ред. Б.Г. Коренева, А.Ф. Смирнова. Москва : Стройиздат, 1986. 462 с.
16. Дукарт А. В. Оптимальные параметры и эффективность одномассового динамического гасителя колебаний с вязким трением при периодической возмущающей нагрузке типа «Прямоугольный синус» *Вестник МГСУ*. 2009. Вып. 4. С. 92-100.
17. Елисеев С. В. Динамический гаситель колебаний как средство управления динамическим состоянием виброзащитной системы. *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. Москва, 2011. Вып. 8. С. 4.
18. Елисеев С. В., Нерубенко Г. П. Динамические гасители колебаний : учебное пособие. Новосибирск : Наука, 1982. 144 с.
19. Загора А. Л. Гашение колебаний мостовых конструкций. *Вестник Днепр. нац. ун-та ж-д транспорта. Наука и прогресс транспорта*. Днепропетровск, 2005. С. 118-123.
20. Загора А. Л., Казакевич М. И. Гашение колебаний мостовых конструкций : учеб. пособие. Москва : Транспорт. 1983. 134 с.

21. Ивович В.А., Онищенко В.Я. Защита от вибраций в машиностроении : справочник. Москва: Машиностроение, 1990. 272с.
22. Итоги науки и техники. Серия Механика твёрдых деформируемых тел : в 22 т. / ред. изд.: Григолюк Э. И., Селезов И. Т.; Т.5. : Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Москва : ВИНТИ, 1973. 272 с.
23. Киба С.П., Демьяненко А.Г. Обобщение метода разделения переменных и некоторые его приложения в механике : монография. Киев, 1991. 120 с.
24. Киба С.П., Перехрест В.И. Об одной схеме разделения переменных в одномерном волновом уравнении. *Дифференциальные уравнения и их приложения в физике*. Днепропетровск, 1991. С. 18-26.
25. Корнев Б.Г., Волоцкий М.Я., Фукс О.М. О гашении колебаний мачтовых сооружений *Строительная механика и расчет сооружений*. Москва, 1976. № 1. С. 41-43.
26. Корнев Б. Г., Резников Л. М. Динамические гасители колебаний: теория и технические приложения : учеб. пособие. Москва : Наука, ГРФМЛ, 1988. 304 с.
27. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров : справочник. Москва : Наука, ГРФМЛ, 1974. 832 с.
28. Кулябко В. В. Нелинейное взаимодействие конструкций мостов, пути, инфраструктуры с основанием и инерционной дискретной подвижной нагрузкой общего вида: расчеты, испытания, гашение колебаний. *Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта*. Днепропетровск, 2010. Вып. 16. С. 146-149.
29. Кулябко В., Масловский А., Сартаков Д. Разработка принципиально новых устройств гашения колебаний конструкций на основе расчетов нелинейных колебаний сооружений. *Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions*. Warsaw, 2009. Вып. 17, С. 185-192.
30. Маневич А. И. Поперечные волны в балке Тимошенко из вязко-упругого материала. В: *Theoretical Foundations of Civil Engineering – XV*. Warsaw, 2009. P. 209-216.

31. Маневич А., Демедецкая В. Вынужденные колебания вязкоупругой балки с демферами вязкого трения и сосредоточенными массами. *Theoretical Foundations of Civil Engineering – XI, Polish-Ukrainian Transactions*. Warsaw : PW, 2011. Vol. 19. P. 161-168.
32. Марочка В. В. Демпфірування вертикальних коливань балкових пішохідних мостів елементами з гідравлічним опором : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : 05.23.01. Дніпропетровськ, 2006. 18 с.
33. Марочка В. В. Урахування гідромеханіки демпферів при гасінні коливань прогінних будов мостів. *Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна*. Дніпропетровськ, 2004. Вип. 3. С. 134-136.
34. Мартин В. Є., Дівеєв Б. М., Дорош І. Р. Застосування різного типу маятникових динамічних гасників коливань. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. Харьков, 2014. Вып. 7 (71). С. 15-19.
35. Михасев Г. И., Ботогова М. Г. О контроле n-ой моды колебаний балки с присоединенным динамическим гасителем. *Сборник Теоретическая и прикладная механика*. Минск, 2009. Вып. 24. С. 30-33.
36. Наумова Г.А., Пономаренко С.А. Гидродинамический способ гашения колебаний мостовых пролетов. *Вестник гражданских инженеров*. Санкт-Петербург, 2012. №6 (35). С. 51-59.
37. Наумова Г. А., Саманов В. В., Пономаренко С. А. Гидродинамический гаситель мостовых колебаний. Серия 10: Инновационная деятельность. *Вестник Волгоградского государственного университета*. Волгоград, 2012. Вып. 7. С. 93-98.
38. Овчинников И. И., Овчинников И. Г., Филиппова В. О., Танцующий мост в Волгограде: причины, аналогии, мероприятия. Часть 1. Причины. *Журнал Науковедение*. 2015. Том 7, №6. URL : <http://naukovedenie.ru/PDF/07KO615.pdf> (дата обращения: 12.07.2018)
39. Овчинников И. И., Овчинников И. Г., Филиппова В. О., Танцующий мост в Волгограде: причины, аналогии, мероприятия. Часть 2. Аналогии.



Мероприятия. *Журнал Науковедение*. 2015 Том 7, №6. URL : <http://naukovedenie.ru/PDF/08KO615.pdf> (дата обращения: 12.07.2018)

40. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем : монография. Москва : ГИФМЛ, 1960. 194 с.
41. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний : учеб. пособие. Изд-е 2-е. М., Машиностроение, 1967. 316 с.
42. Пановко Я. Г. Присоединённые динамические системы как гасители колебаний. Прочность, устойчивость, колебания : справочник. Том 2. Москва: Машиностроение, 1968. С. 331-346.
43. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем : учеб. пособие. Москва: Наука, 1967. 420 с.
44. Поляков В. С. К вопросу об эффективности динамического гасителя при сейсмических воздействиях. *Строит. мех. и расчёт сооружений*. Москва, 1980. № 5. С. 49-53.
45. Резников Л.М. Развитие теории динамических гасителей колебаний и её приложениям в задачах виброзащиты конструкций и сооружений: автореф. дисс. на соискание уч. степ. д-ра техн. наук. Москва, МИСИ, 1987. 42 с.
46. Рекомендации по проектированию гасителей колебаний для защиты зданий и сооружений, подверженных горизонтальным динамическим воздействиям от технологического оборудования и ветра : учеб. пособие. / под. ред. Г. А. Жигачева. Москва : Стройиздат, 1978. 68 с.
47. Рутман Ю.Л., Мелешко В.А. Причины колебаний моста в Волгограде. *Строительная механика и расчет сооружений*. Москва, 2011. № 3. С. 55-58.
48. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем : монография. Москва : Госстройиздат, 1960. 131 с.
49. Справочник Вибрации в технике: Защита от вибрации и ударов. Т.6. / под ред. К.В. Фролова. Москва : Машиностроение, 1981. 456 с.
50. Справочник проектировщика. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. / под ред. профессоров Коренева Б. Г., Рабиновича И. М. Москва : Стройиздат, 1981.

51. Справочник проектировщика. Динамический расчет зданий и сооружений. / под ред. Коренева Б. Г., Рабиновича И. М. Москва : Стройиздат, 1981.
52. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле : монография. Москва : ГИФМЛ, 1959. 440 с.
53. Улицкая Р.И., Спиридонов В.В. К определению параметров подвесных демпферов колебаний однопролётной балки. Расчёт пространственных строительных конструкций. *Межвуз. темат. сборник*. Куйбышев : КИСИ, 1976. С. 35-43
54. Филиппов А. П. Колебания упругих систем : учебное пособие. Киев, 1956. 321 с.
55. Шермухамедов У.З., Кузнецова И.О. Влияние точности настройки динамических гасителей колебаний на сейсмостойкость мостов. *Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта*. Днепропетровск, 2012. С. 175-180.
56. Ярошенко Д.С. Рациональные параметры одномассовых динамических гасителей колебаний с трением, принципы настройки. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*. 2013. Вып. 4. С. 43-49.
57. Abe M., Igusa T. Semi-active dynamic vibration absorbers for controlling transient response. *Journal of Sound and Vibration*. 1996. № 198 (5). P. 547-569.
58. Adkins R. L., Jones D. I., Nashif A. D. Effect of tuned dampers on vibrations of simple structures. *AIAA Journal*. 1967. Vol. 5. № 2. P. 310-315.
59. Anderson R. A. Flexural Vibrations in Uniform Beams According to the Timoshenko Theory. *Journal of Applied Mechanics*. 1953. Vol. 20, №. 4. P. 504-510.
60. Brock J. E. A Note on Damped Vibration Absorbers. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1946. Vol. 68. P. A248.
61. Bambill D. V., Rossit C. A. Forced vibrations of a beam elastically restrained against rotation and carrying a spring–mass system. *Ocean Engineering*. 2002. Vol. 29, Issue 6. P. 605–626.

62. Dahlberg T. On optimal use of the mass of a dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*. 1989. Vol. 132. Issue 3. P. 518–522.
63. Dolph C. L. On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations, *Quarterly of Applied Mathematics*. 1954. Vol. 12. P. 175-187.
64. Esmailzadeh E., Jalili N. Optimum Design of Vibration Absorbers for Structurally Damped Timoshenko Beams. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1998. Vol. 120, № 4. P. 833-841.
65. Gristchak V. Z., Fatieieva Y. A. An approximate nonlinear dynamic problem solution of functionality graded material shallow shell structure with in time thickness variation. *Vistnik ZNU. Zaporizhzhya*, 2014. №2. P. 24-31.
66. Gristchak V. Z., Ganilova O. A. A Hybrid WKB – Galerkin Method Applied to a Piezoelectric Sandwich Plate Vibration Problem Considering Shear Force Effects. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 317. №1-2. P. 366-377.
67. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Y. A. Hybrid asymptotic methods. Theory and applications. Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University. 2016.
68. Gurgoze M. On the alternative formulations of the frequency equations of a Bernoulli–Euler beam to which several spring–mass systems are attached in span. *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 217. Issue 3. P. 585–595.
69. Haddow A. G., Shaw S. W. Centrifugal Pendulum Vibration Absorbers: an Experimental and Theoretical Investigation. *Nonlinear Dynamics*. 2003. Vol. 34. P. 293-307.
70. Hermann G. Forced Motions of Timoshenko Beams. *Journal of Applied Mechanics. Trans. of ASME*. 1955. Vol. 22, № 1. P. 33-56.
71. Ibrahim R. A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 314. P. 371-452.
72. Jacquot R. S. Optical dynamic vibration absorbers for general beam systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1978. Vol. 60. № 4. P. 535-542.
73. Kim T., Park I., Lee U. Forced Vibration of Timoshenko beam Subjected to Stationary and Moving Loads Using the Modal Analysis Method. *Shock and Vibration*. 2017. Vol. 2017. P. 26.

74. Klein H. W., Kaldenbach W. A new vibration damping facility for steel chimneys: *Proc. Conf. Mechanics in Design*. Trent University of Nottingham, UK, 1998. P. 265–273.
75. Lee H. C. Forced Lateral Vibration of a Uniform Cantilever Beam with Internal and External Damping. *Journal of Applied Mechanics*. 1960. Vol. 27. P. 551-556.
76. Liu K., Coppola G. Optimal design of damped dynamic vibration absorber for damped primary systems. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*. 2010. Vol. 34, №. 1. P. 119.
77. Liu K., Liu J. The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 284. P. 1181-1189.
78. Majkut L. Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single differential equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2009. Vol. 47, №. 1. P. 193-210.
79. Manevich A. I. Dynamics of Timoshenko beam on linear and nonlinear foundation: phase relations, significance of the second spectrum, stability. *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 344. P. 209-220.
80. Manevich A., Demedetskaya V. Oscillation of viscoelastic Timoshenko beam with dynamic vibration absorber and concentrated masses. *Statics, Dynamics and Stability of Structures. Review and Current Trends in Stability of Structures : a series of monographs*. Lodz, 2013. Vol. 3. P. 147-178.
81. Manevich A., Demedetskaya V. Forced Oscillations of a Viscoelastic Timoshenko Beam with Dampers and Dynamic Vibration Absorbers. In: “*Statics, Dynamics and Stability of Structures*”. Vol. 5, *Selected problems of solid mechanics*. Lodz University of Technology. A series of monographs. Eds. Z. Kołakowski and R. Mania. Lodz, 2016, c. 233-263.
82. Manevich A., Kolakowsky Z. Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2011. Vol. 49, №. 1. P. 3-16.

83. Meinhardt C., Newland D., Talbot J., Taylor D. Vibration performance of London's millennium footbridge. 24<sup>th</sup> International Congress on Sound and Vibration, 2017. London.
84. Neubert V. H. Dynamic absorbers applied to a bar that has solid damping. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1964. Vol. 36. № 4. P. 673-680.
85. Newland D. E. Vibration of the London millennium footbridge. Millennium footbridge: Part 1 – cause. University of Cambridge: вебсайт. URL: [http://www2.eng.cam.ac.uk/~den/ICSV9\\_06.htm](http://www2.eng.cam.ac.uk/~den/ICSV9_06.htm) (дата звернення: 24.02.2019).
86. Newland D. E. Vibration of the London millennium footbridge. Millennium footbridge: Part 2 – cure. University of Cambridge: вебсайт. URL: [http://www2.eng.cam.ac.uk/~den/ICSV9\\_04.htm](http://www2.eng.cam.ac.uk/~den/ICSV9_04.htm) (дата звернення: 24.02.2019).
87. Ormondroyd J., Den Hartog J. P. The Theory of Dynamic Vibration Absorber. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1928. Vol. 49. P. A9-A22.
88. Pan H. H., Vibration of a Viscoelastic Timoshenko beam. *Journal of Engineering Mechanics Division. Proc. of ASCE*. 1966. Vol. 92. №. EM2. P. 213-234.
89. Pipes L.A. Analysis of a nonlinear dynamic vibration absorber. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1953. Vol. 20. P. 515-518.
90. Ricardo Yu. D., Burdisso A., Nikolaidis E. Control of internal resonances in vibration isolators using passive and hybrid dynamic vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 286. Issue 4-5. P. 697–727.
91. Sava R., Kernytsky I., Divejev B. Optimization of Dynamic Vibration Multy-Absorber: monografia. *Systemy i środki transportu samochodowego. Wybrane zagadnienia. Seria : Transport. Politechnika Rzeszowska*. Rzeszów, 2013. P. 173–180.
92. Snowdon J. C. Longitudinal vibration of internally damped rods. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1964. Vol. 36. P. 502-510.
93. Snowdon J. C. Response of a simply clamped beam to vibratory forces and moments. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1964. Vol. 36. №. 3. P. 495-501.

94. Snowdon J. C. Steady state behavior of the dynamic absorber. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1959. Vol. 31. P. 1096-1103.
95. Snowdon J. C. Steady state behavior of the dynamic absorber-addendum. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1964. Vol. 36. P. 1121-1123.
96. Snowdon J. C. Transverse vibration of internally damped beams with rotary inertia and shear. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1963. Vol. 35. №. 11. P. 1897-1898.
97. Snowdon J. C. Transverse vibration of beams with internal damping, rotary inertia and shear. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1963. Vol. 35. №. 12. P. 1997-2006.
98. Snowdon J. C. Vibration of cantilever beams to which dynamic absorbers are attached. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1966. Vol. 39. P. 878-886.
99. Snowdon J. C. Vibration and Shock in damped mechanical systems: monograph. New York: J. Wiley and son, 1968. 486 p.
100. Snowdon J. C., Nobile M. A. Beamlike dynamic vibration absorbers. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1980. Vol. 44. №. 2. P. 98-108.
101. Snowdon J. C., Wolfe A.A., Kerlin K.L. The cruciform dynamic vibration absorber. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1984. Vol. 75. № 6. P. 1792-1799.
102. Sun J. Q., Jolly M. R., Norris M. A Passive adaptive and active tuned vibration absorber – a survey. *Journal of Applied Mechanics. Transaction of ASME*. 1995. Vol. 17. P. 234-242.
103. Timoshenko S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1921. Vol. 41. P. 744-746.
104. Timoshenko S. P. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1922. Vol. 43. P. 125-131.

105. Traill-Nash R. W., Collar A. R. The effects of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams. *The Quarterly Journal of Mechanics. and Applied Mathematics*. 1953. Vol. 6, Part 2. P. 186-222.
106. Wang C. M., Reddy J. N., Lee K. H. Shear Deformable Beams and Plates : Relationships with Classical Solutions. : monographie. Oxford, UK, 2000. P. 312.
107. Warburton G. V. Optimal absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1982. Vol. 10. №. 3. P. 381-401.
108. Warburton G. V., Ayorinde E. O. Optimal absorber parameters for simple systems. *Earthquake eng-g. and structural dynamics*. 1980. Vol. 8. P. 197-217.
109. Wu J. S., Chen D. W. Dynamic analysis of a uniform cantilever beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 229, Issue 3. P. 549-578.
110. Wu J. S., Chen D. W. Free vibration analysis of a Timoshenko beam carrying multiple spring–mass systems by using the numerical assembly technique. *Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2001. Vol. 50. P. 1039–1058.

## ДОДАТОК.

## СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

**Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації**

1. Демедецкая В. В., Маневич А. И., Пацюк А. Г. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 148 - 160.

2. Демедецкая В. В. Колебания консольной вязкоупругой балки с демпфером вязкого трения и сосредоточенными массами. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2011. Вип. 12. С. 83 - 93.

3. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения и сосредоточенными массами. *Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish – Ukrainian Transactions*. Warsaw, 2011. Vol. 19. P. 161 - 168.

4. Demedetskaya V., Manevich A. Oscillations of viscoelastic Timoshenko beam with dynamic vibration absorber and concentrated masses. *Statics, Dynamics, Stability of Structures*. Lodz, 2013. Vol.3. Chapter 5. P. 147 - 177.

5. Демедецкая, В. В. Свободные колебания вязкоупругой балки Тимошенко с динамическим гасителем колебаний и сосредоточенными массами. *Вісник Дніпропетровського національного університету. Сер. Механіка*. Дніпропетровськ, 2014. Вип.18(2). №7. С. 66-80.

6. Demedetskaya V., Manevich A. Forced oscillations of a viscoelastic Timoshenko beam with dampers and dynamic vibration absorbers. *Statics, Dynamics, Stability of Structures : a series of monographs*. Lodz, 2016. Vol.5. Chapter 10. P. 233 - 263.

**Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації**

7. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Динамика вязкоупругой балки Тимошенко с динамическим гасителем колебаний. *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: материалы VII Международной научной*



конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика НАН Украины А. С. Космодемьянского (Донецк, 11-14 июня 2013 г.). Донецк, 2013. С. 34 - 38.

8. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вынужденные колебания вязкоупругой балки Тимошенко с гасителем колебаний. Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (Одеса, 16-19 трав. 2017 р.). Одеса, 2017. С. 92 - 96.

9. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вязкоупругая балка Тимошенко с демпферами вязкого трения и динамическими гасителями колебаний. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції, присвяченій пам'яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (до сторіччя від дня народження) (Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро, 2019. С. 170 - 171.

#### **Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації**

10. Демедецкая В. В. Влияние кориолисовых сил инерции на динамику вращающихся балок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 9. С. 72 - 79.

11. Демедецька В. В., Маневич А. І., Пономарьова Л. Ф. Zur Frage der wirtschaftlichen Effektivität bei der Anwendung von Flüssigkeitsschwingungsdämpfer. *Актуальні питання сучасної економічної науки та міжнародних відносин*: матеріали регіональної науково-практичної конференції молодих учених та студентів (Дніпро, 25-26 лист. 2011 р.). Дніпропетровськ, 2011. С. 112 - 113.