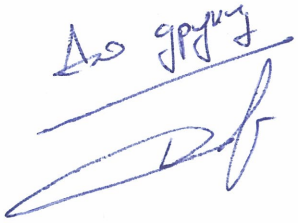
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ПРИДНІПРОВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ»



ДЕМЕДЕЦЬКА Вероніка Віталіївна

УДК 624.04

ДИНАМІКА В'ЯЗКОПРУЖНОЇ БАЛКИ ТИМОШЕНКО З ДЕМПФЕРАМИ В'ЯЗКОГО ТЕРТЯ ТА ДИНАМІЧНИМИ ГАСНИКАМИ КОЛИВАНЬ

05.23.17 – будівельна механіка

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата технічних наук

Дніпро – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор
МАНЕВИЧ Аркадій Ісаакович,
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
професор кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки.

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор, **Грищак Віктор Захарович,** Запорізький національний університет, завідувач кафедри прикладної математики і механіки, заслужений діяч науки і техніки України;

кандидат технічних наук, професор, **Дем'яненко Анатолій Григорович,** Дніпровський державний аграрно-економічний університет, завідувач кафедри теоретичної механіки, опору матеріалів та матеріалознавства.

Захист відбудеться *5 березня 2020 року о 12 ^{00} годині* на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 08.085.02 при Державному вищому навчальному закладі «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури» за адресою: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, ауд. 202.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Державного вищого навчального закладу «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури» за адресою: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, та на сайті http://pgasa.dp.ua/dissertation/.

Автореферат розіслано *31 січня 2020 року.*

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
Д 08.085.02, д.т.н., професор Слободянюк С.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження коливань балок з приєднаними до них динамічними гасниками коливань (ДГК) та демпферами в'язкого тертя становить інтерес у зв'язку з проблемою гасіння коливань конструкцій, зокрема, башт та мостів.

Практика машинобудування та цивільного будівництва протягом останніх десятиліть показала, що ДГК і демпфери в'язкого тертя є одними з ефективніших засобів зменшення небажаних коливань конструкцій та споруд.

Одним з останніх успішних прикладів застосування динамічних гасників коливань можна назвати демпфування коливань пішохідного моста Millennium Bridge в Лондоні (2001). В цілому 37 демпферів і гасителів, спеціально розроблених компанією Taylor Devices Inc., були встановлені для зменшення амплітуд крутильних і горизонтальних коливань. Використання гасників зменшило динамічний відгук у 40 разів.

Відзначимо також використання динамічних гасників коливань для гасіння резонансних коливань моста через Волгу в м. Волгограді (2010) та вежі Yokohama Landmark Tower в Японії., що є найвищою будівлею в Японії.

В даний час при аналізі подібних задач для балочних конструкцій зазвичай обмежуються найпростішими моделями з одним ступенем свободи, які не можуть дати адекватного опису динаміки балки.

Розрахунок багатьох конструкцій вимагає врахування зсувної податливості, а також внутрішнього і зовнішнього тертя (біля резонансів), в зв'язку з чим представляє інтерес використання моделі балки Тимошенко (БТ) і моделі Фохта для в'язкопружного матеріалу.

Важливою і актуальною задачею є визначення оптимальних значень параметрів демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників коливань - коефіцієнту в'язкого тертя в гаснику, коефіцієнту непружного опору у зв'язках, відносної маси та налаштування (частоти) гасника. Відомі роботи Дж. Ден Гартога, G. V.Warburton, J. Q. Sun, M. R. Jolly, M. A. Norris, Б.Г. Коренєва, Л.М. Рєзнікова та інших внесли важливий внесок у розробку цієї проблеми, але застосування все більш складних розрахункових моделей потребує подальшого розвитку цих досліджень.

У роботі розроблено математичну модель і отримано ефективний аналітичний розв'язок задачі про коливання балки з демпферами і динамічними гасниками коливань (ДГК) як систем з розподіленими і зосередженими параметрами, в рамках уточненої моделі балок - "балки Тимошенко» (БТ), яка враховує зсувну податливість, інерцію повороту та внутрішнє тертя. Врахування вищезгаданих обставин обумовлює актуальність вибраної теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень кафедри обчислювальної механіки та міцності конструкцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара. Робота виконувалася у рамках одного із розділів держбюджетної теми «Моделі, методи та алгоритми дослідження неоднорідних елементів конструкцій при статичному та динамічному навантаженні», номер державної реєстрації 016U003316, 2010-2014 рр.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розробка ефективного аналітичного розв’язку задачі про коливання балкових конструкцій з приєднаними до них демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань з врахуванням зсувної податливості та внутрішнього в'язкого тертя, а також аналіз отриманого розв’язку з метою вивчення закономірностей динаміки в'язкопружних балок з гасниками коливань і визначення їх оптимальних параметрів. Ця проблема передбачає розв’язання наступних задач:

– аналіз використовуваних в даний час математичних моделей і методів розв'язання задач динаміки балкових конструкцій з зосередженими впливами;

– розробка ефективної математичної моделі задачі динаміки в'язко-пружної балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань (ДГК);

– отримання загального розв’язку задачі про коливання в'язко-пружної балки Тимошенко з зосередженими впливами з урахуванням неможливості відокремлення змінних в дійсній області;

– аналіз власних частот і вільних коливань в'язко-пружної балки Тимошенко (БТ);

– аналіз впливу демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників на характеристики вільних і вимушених коливань в'язко-пружної БТ;

– розробка рекомендацій щодо вибору оптимальних параметрів гасників коливань (параметри налаштування та демпфування).

Об'єкт дослідження – процес коливання балок з приєднаними до них демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань (ДГК) з урахуванням в'язко-пружних властивостей балок та їх зсувної податливості (у моделі Тимошенко).

Предмет дослідження – математична модель динаміки балки із демпферами та ДГК з урахуванням зсувної податливості і внутрішнього в'язкого тертя, та аналітичний розв'язок цієї моделі; вплив демпферів та ДГК на характеристики коливань балок; визначення оптимальних параметрів і оцінка ефективності демпферів і ДГК.

Методи дослідження. Диференційні рівняння динаміки балки з гасниками включають в себе непарні за часом часткові похідні (в тому числі змішані), що з'являються завдяки врахуванню в’язко-пружних властивостей матеріалу і зосереджених впливів від демпферів і гасників коливань. Як відомо, при наявності цих похідних класичні методи, засновані на відокремленні змінних в дійсній області шуканих функцій, непридатні. У даній роботі зазначені труднощі долаються за допомогою переходу в комплексну область, в якій відокремлення змінних стає можливим.

Отримана система диференційних рівнянь (ДР) вирішувалася з використанням методу комплексних амплітуд і розкладанням шуканого рішення за власними формами коливань пружної балки Тимошенко (без внутрішнього тертя і гасників коливань).

Результати численних експериментів, що приводяться в роботі, отримані за допомогою програми Python та бібліотеки SageMath.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

– удосконалено математичну модель коливань балки Тимошенко з в'язко-

пружного матеріалу з приєднаними зосередженими масами, демпферами і динамічними гасниками коливань при дії довільного розподіленого та зосередженого навантаження, що використовує зручну систему безрозмірних змінних і параметрів. Використання моделі Тимошенко дозволяє врахувати зсувні деформації і інерцію обертання, що необхідно при розрахунку широкого класу мостових та баштових конструкцій, а врахування внутрішнього і зовнішнього тертя дозволяє описати резонансну динаміку балки;

– отримав подальший розвиток аналітичного розв’язок задачі про вільні та вимушені коливання в'язко-пружної балки Тимошенко з ДГК і демпферами в'язкого тертя при довільному навантаженні. Показано, що метод розкладання динамічних переміщень по власним формам коливань пружної балки Тимошенко має певні переваги у порівнянні з методами будівельної механіки, що зазвичай застосовувались при розв'язанні аналогічних задач у межах класичної теорії балок;

– отримав подальший розвиток аналіз впливу параметрів балки (зсувної жорсткості, внутрішнього і зовнішнього тертя), демпферів в’язкого тертя та ДГК на характеристики вимушених коливань.

– вперше виявлено принципову роль рухомих складових у динамічному відгуку в'язко-пружних балок із зосередженими силами та гасниками коливань.

– вперше проведено порівняльний аналіз динаміки балки при наявності демпферів в'язкого тертя і динамічних гасників коливань;

– отримав подальший розвиток аналіз залежності оптимальних параметрів ДГК (параметри налаштування і демпфування) від зсувної жорсткості та внутрішнього тертя балки;

– виконано експериментальне дослідження впливу демпфера в’язкого тертя на амплітуди коливань балки, що підтвердило основні аналітичні результати.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи можуть бути застосовані у розрахунковій практиці науково-дослідницьких та проектно-конструкторських установ для розрахунку динаміки та проектування балочних конструкцій (башти, мости та інші), для визначення параметрів гасників коливань та демпферів в’язкого тертя з урахуванням зсувної податливості та внутрішнього тертя у балці.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота виконана здобувачем самостійно. Значна частина наукових результатів також отримана здобувачем самостійно. Автору належить розв’язання задач, проведення чисельного експерименту та обробка результатів, а також проведення експерименту. Постановка задачі та ідея її розв’язання належать науковому керівнику, професору, д.т.н. А. І. Маневичу. Обговорення результатів проведено спільно з науковим керівником. У роботах, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає у наступному:

- аналітичний розв’язок задачі о вимушених коливаннях в’язкопружної балки Тимошенко з динамічними гасниками, демпферами в’язкого тертя та зосередженими

масами [3,4,6,7,8,9];

- проведення чисельного експерименту та аналіз впливу параметрів внутрішнього тертя та параметру зсувної податливості на амплітуди коливань балки Тимошенко [3,6,8,9];
- проведення чисельного аналізу та пошук оптимальних параметрів налаштування параметрів динамічного гасника коливань та демпфера в'язкого тертя [5,6,8,9];
- проведення експерименту з оцінки ефективності демпферів в'язкого тертя з різними рідинами [1].

Апробація результатів дисертації. Основні положення роботи викладено та обговорено на міжнародних наукових семінарах та конференціях: на українсько-німецькому семінарі “Advanced Problems in Mechanics of Heterogeneous Media and Thin-Walled Structures”, (Dnipropetrovsk, 2010), на XIX українсько-польському семінарі «Theoretical Foundations of Civil Engineering» (Warsaw, 2011), VII Международной научной конференции, посвященной 90-летию академика НАН Украины А. С. Космодемьянского (Донецк. 2013), IV Міжнародній науково-практичній конференції (Одеса, 2017), 2-й Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпро, 2019).

Результати і дослідження цієї праці були неодноразово викладені на щорічних звітових конференціях ДНУ (2010 – 2013). У повному обсязі результати роботи були представлені на міжвузівському науковому семінарі «Проблеми нелінійної механіки» під керівництвом проф. А. І. Маневича (Дніпро, 2019), на науковому семінарі кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки ДНУ (Дніпро, 2019) та міжвузівському науковому семінарі «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» ЗНУ (Запоріжжя, 2020).

Публікації. За матеріалами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових робіт, у тому числі 4 тези доповідей та 7 статей у наукових фахових виданнях, з яких 3 статті в іноземному виданні.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота викладена на 144 сторінках машинописного тексту, складається зі вступу, 5 розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Обсяг основного тексту дисертації складає 114 сторінок друкованого тексту. Робота ілюстрована 10 таблицями та 43 рисунками, список використаних джерел містить 110 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено обґрунтування актуальності роботи, сформульована мета і задачі досліджень, відзначена наукова новизна і практична цінність отриманих результатів.

У **розділі 1** на підставі аналізу літератури дана коротка історія досліджень демпфування небезпечних коливань будівельних та машино - будівельних конструкцій із застосуванням ДГК та демпферів, починаючи з роботи Фрама, який в

1909 р вперше запатентував конструкцію ДГК, і праць адмірала С.О. Макарова та акад. А.Н. Крилова по угамуванню корабельного хитання.

На начальному етапі ці дослідження виконувались для найпростіших лінійних коливальних систем з одним ступенем свободи (роботи Д. Гартога, Д. Ормондройда, Д. Брока). Подальші роботи у цьому напрямку та дослідження з загальної теорії коливань конструкцій з демпферами та ДГК пов'язані з іменами А. М. Алексеєва, І. В. Ананьєва, В. І. Бабицького, С. В. Єлісеєва, А.К. Зборовського, Г.П. Нерубенко; В.С. Ильїнського, Б.Г. Коренева, Л.М. Резнікова, Я.Г. Пановко, Н.А. Пікулєва, J.C. Snowdon, G.V. Warburton, R.A. Ibrahim, F.E. Reed, K. Liu, G. Coppola та інших.

Динаміка пружних балок, рам с ДГК, демпферами в'язкого тертя та зосередженими масами у рамках класичної теорії вивчалася у роботах Б.Г. Коренева, Л.М. Резнікова; V. H. Neubert, D.I.G. Jones, J. C. Snowdon; J. S. Wu, D. W. Chen; А.Л. Закори, М.І. Казакевича; В. З. Грищака, Т. А. Д'яченко; А.Г. Дем'яненко, С.П. Кіба; В.В. Кулябко, Д.С. Ярошенко та інших.

Використання класичної теорії балок Ейлера-Бернуллі, яка нехтує зсувною деформацією в поперечних перетинах балки, може призводити до помітних похибок при вирішенні задач, що в свою чергу призвело до появи уточнених теорій. Однією з теорій, уточнюючих класичну теорію балок, є модель балки Тимошенко. Дослідження в даному напрямку наведені в роботах С. П. Тимошенко, C. L. Dolph, R. W. Traill-Nash, G. Hermann; H. H. Pan; Е. І. Гріголюка, І. Т. Селезова, А. І. Маневича, Z. Kolakowski та інших роботах.

У літературі є лише поодинокі роботи, в яких розглядається динаміка балки Тимошенко з демпферами і гасниками коливань. Деякі попередні результати по визначенню оптимальних параметрів ДГК для балки Тимошенко наведені в роботі E. Esmailzadeh, N. Jalili.

На основі аналізу сучасного стану проблеми динаміки балочних конструкцій з демпферами та ДГК сформульовано основні задачі даної роботи.

У розділі 2 формулюється математична модель динаміки балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя і ДГК при дії довільного навантаження та отримано її розв'язок.

Розглядається в'язко-пружна балка Тимошенко із демпферами в'язкого тертя та динамічними гасниками коливань у довільних перерізах (Рис. 1). У якості ДГК розглядаємо лінійно-пружній осцилятор з в'язким тертям. На балку діє змінне навантаження $q_0(x,t)$, котре може включати розподілене зовнішнє навантаження $q_e(x,t)$ та зосереджені сили $P(t)$. Матеріал балки вважається таким, що підпорядковується закону Фохта, відповідно до якого напруження (нормальне та дотичне) залежить не тільки від деформацій, але і від їх швидкостей:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + k_1\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = E\left(1+\mu_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\varepsilon_x, \qquad \tau = G\gamma + k_2\frac{\partial \gamma}{\partial t} = G\left(1+\mu_2\frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma, \tag{1}$$

де $k_{1,2}$ і $\mu_1 = k_1/E$, $\mu_2 = k_2/G$ - параметри внутрішнього в'язкого тертя, γ - кут зсуву, E і G - модулі пружності при розтягу та зсуві.

На відміну від класичної моделі балки, динаміка БТ описується системою рівнянь відносно двох незалежних змінних - повного прогину $y(x,t)$ і кута повороту

перетину $\psi(x,t)$. Повний кут нахилу зігнутої осі балки з урахуванням зсуву дорівнює $\partial y / \partial x = \psi + \gamma$.

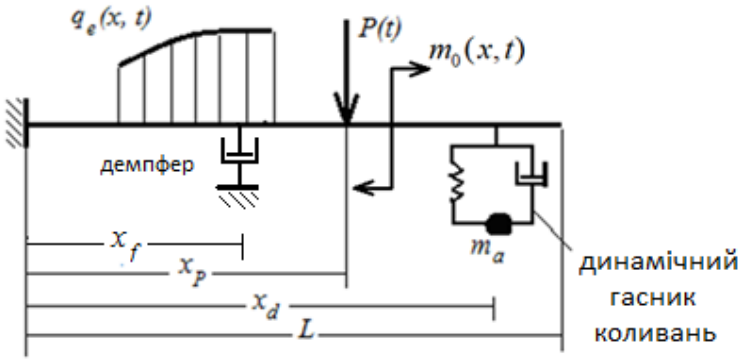


Рисунок 1 - Механічна модель

Прийнятий закон Фохта призводить до наступних виразів для згинального моменту і перерізуючих сил в балці:

$$M = -EJ\left(1+\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial \psi}{\partial x},\ Q = k'A\tau = k'AG\left(1+\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right). \qquad (2)$$

Умови рівноваги системи сил, що діють на елемент балки, включаючи сили інерції і моменти сил інерції, з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя, приводять до системи двох диференційних рівнянь в часткових похідних відносно прогину y та кута повороту перерізу ψ :

$$k'\,G\,A\left(1+\mu\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)-\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\beta_1\frac{\partial y}{\partial t}+q_0(x,t)=0\,; \qquad (3)$$

$$-\rho J\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+k'AG\left(1+\mu\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\psi\right)+EJ\left(1+\mu\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\beta_2\frac{\partial\psi}{\partial t}+m_0(x,t)=0\,, \qquad (4)$$

де ρ - щільність матеріалу балки, A - площа поперечного перерізу, k' - коефіцієнт, що залежить від форми поперечного перерізу, β_1, β_2 - коефіцієнти зовнішнього в'язкого тертя.

Зручно ввести для балки і гасника наступні безрозмірні змінні і параметри:

$$\xi=\frac{x}{r_0},\ Y=\frac{y}{r_0},\ \tau=\frac{c}{r_0}t,\ \ \chi=\frac{E}{k'G},\ \mu^*=\frac{c}{r_0}\mu\ ,\ q=\frac{q_0 r_0}{E\,A},$$
$$m=\frac{m_0}{r_0\rho A},\ \beta_1^*=\frac{cr_0}{EA}\beta_1,\ \ \beta_2^*=\frac{c}{EA}\beta_2, \qquad (5)$$

де $r_0 = \sqrt{J/A}$ - радіус інерції поперечного перерізу, $c=\sqrt{E/\rho}$ - швидкість поздовжніх хвиль (або швидкість звуку). Тоді система рівнянь руху балки набуває вигляду:

$$\left(1+\mu^*\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial Y}{\partial\xi}-\psi\right)-\chi\frac{\partial^2 Y}{\partial\tau^2}-\beta_1^*\,\chi\frac{\partial Y}{\partial\tau}+\chi\,q(\xi,\tau)=0\,;$$

$$-\chi\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+\left(1+\mu^*\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial\xi}-\psi\right)+\chi\left(1+\mu^*\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-\beta_2^*\chi\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\chi\,m(\xi,\tau)=0\,. \qquad (6)$$

У такому вигляді система рівнянь руху в'язкопружної балки Тимошенко була отримана в роботі А. І. Маневича (2011). Ця система залежить від чотирьох безрозмірних параметрів: коефіцієнту χ, що характеризує зсувну податливість балки (якщо він дорівнює нулю, то отримуємо класичну модель балки); коефіцієнти β_1^*, β_2^* - зовнішнє тертя, коефіцієнт μ^* - внутрішнє тертя. Параметри гасника включаються у навантаження $q(\xi,\tau)$.

Граничні умови в безрозмірних параметрах мають наступний вигляд

1. Шарнірне закріплення:

$$Y=0,\ \ M=0\ \rightarrow\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi}=0; \tag{7}$$

2. Жорстке закріплення:

$$Y=0,\ \ \psi=0; \tag{8}$$

3. Вільний край:

$$M=0,\ \ Q=0\ \rightarrow\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi}=0;\ \ \frac{\partial Y}{\partial\xi}-\psi=0. \tag{9}$$

Розв'язок задачі про сталі вимушені коливання в'язкопружної БТ при дії гармонійного зовнішнього навантаження $q(\xi,\tau)=q(\xi)e^{i\Omega\tau}$, шукаємо у вигляді гармонійних коливань з тією ж частотою:

$$Y(\xi,\tau)=e^{i\Omega\tau}Y(\xi),\quad \psi(\xi,\tau)=e^{i\Omega\tau}\Psi(\xi). \tag{10}$$

Рівняння коливань (6) призводять до звичайних диференційних рівнянь з комплексними коефіцієнтами. Далі нормовані коефіцієнти зовнішнього тертя приймаються рівними $\beta_1^*=\beta_2^*=\beta^*$ і отримаємо систему:

$$\left(1+i\,\mu^*\Omega\right)\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dY}{d\xi}-\psi\right)+\Omega^2\chi Y-i\Omega\,\beta^*\chi Y+\chi q\,(\xi)=0;$$

$$\chi\Omega^2\psi+\left(1+i\mu^*\Omega\right)\left(\frac{dY}{d\xi}-\psi\right)+\chi\left(1+i\mu^*\Omega\right)\frac{d^2\psi}{d\xi^2}=0. \tag{11}$$

Для вирішення системи (11) використовується метод розкладання розв'язку за власними формами коливань *пружної* БТ *без* внутрішнього і зовнішнього демпфування та без ДГК. Такий підхід дозволяє задовольнити граничним умовам для БТ і уникнути труднощів, пов'язаних з розрахунком власних форм при наявності тертя і гасника. Тому перший крок розрахунку полягає у визначенні власних частот і форм пружної БТ.

Власні частоти ω_j та власні форми (Y_j , Ψ_j), $j=1,2,\ldots$, пружної БТ визначаються системою рівнянь

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dY_j}{d\xi}-\Psi_j\right)=-\chi\omega_j^2Y_j\ ,\ \ \chi\frac{d^2\Psi_j}{d\xi^2}+\frac{dY_j}{d\xi}=\Psi_j(1-\chi\omega_j^2),\ \ j=1,2,\ldots. \tag{12}$$

Умови ортогональності власних форм для балки Тимошенко, у прийнятих безрозмірних змінних, мають вигляд (де l -довжина балки)

$$\int_0^{l/r_0} (Y_m Y_n + \Psi_m \Psi_n) d\xi = 0 \,. \tag{13}$$

Нормування власних форм зручно задавати умовою

$$\int_0^{l/r_0} \left(Y_j^2 + \Psi_j^2 \right) d\xi = 1 \,. \tag{14}$$

Функції $Y(\xi)$ та $\Psi(\xi)$ в рівняннях (11) розкладаються у ряди по власним функціям Y_j , Ψ_j пружної БТ:

$$Y(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j Y_j(\xi), \quad \Psi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \Psi_j(\xi) \,. \tag{15}$$

Використовуючи рівняння (12) для власних форм пружної БТ, можна привести систему рівнянь (11) до вигляду:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left(\omega_j{}^2 - \lambda \right) Y_j(\xi) = \frac{q\ (\xi)}{1 + i\,\mu^* \Omega} ;$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \left(\omega_j^2 - \lambda \right) \Psi_j(\xi) = \frac{m(\xi)}{1 + i\,\mu^* \Omega} \,. \tag{16}$$

Помноживши обидва рівняння на $Y_k(\xi)$ і $\Psi_k(\xi)$, після інтегрування по довжині балки з врахуванням умов ортогональності (13) та ортогональності (14), отримаємо комплексні коефіцієнти розкладання $\zeta_k = a_k e^{i\theta_k}$:

$$\zeta_k = \frac{\int_0^{l/r_0} \left(q(\xi) Y_k + m(\xi) \Psi_k \right) d\xi}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + i\,\Omega \left(\mu^* \omega_k^2 + \beta^* \right)} \,. \tag{17}$$

Якщо зовнішнє навантаження є зосередженою гармонійної силою з амплітудою P і прикладена в точці $x_P = r_0 \xi_P$, тоді навантаження враховується за допомогою дельта-функції: $q_0(x) = P\,\delta(x - x_P)$. У безрозмірних параметрах, з урахуванням відомої тотожності $\delta(x) = \delta(\xi) / r_0$ для δ - функції від $x = r_0\,\xi$, маємо:

$$q(\xi) \equiv \frac{q_0 r_0}{E\,A} = \widehat{P} \delta(\xi - \xi_P) \qquad \left(\widehat{P} = \frac{P}{EA} \right). \tag{18}$$

У цьому разі вираз (17) прийме наступний вигляд:

$$\zeta_k = \frac{\widehat{P} Y_k(\xi_P)}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + i\,\Omega \left(\mu^* \omega_k^2 + \beta^* \right)} \,. \tag{19}$$

Розв’язок задачі про вимушені коливання записується або в показовій формі:

$$Y(\xi,\tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta_k} Y_k(\xi) \,, \quad \Psi(\xi,\tau) = e^{i\Omega\tau} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta_k} \Psi_k(\xi) \,, \tag{20}$$

або в алгебраїчній формі:

$$Y(\xi,\tau) = Y_{Re}(\xi,\tau) + i Y_{\mathrm{Im}}(\xi,\tau) \ , \quad \Psi(\xi,\tau) = \Psi_{Re}(\xi,\tau) + i \Psi_{\mathrm{Im}}(\xi,\tau) \,. \tag{21}$$

Тут $Y_{Re}(\xi,\tau), Y_{\mathrm{Im}}(\xi,\tau)$ и $\Psi_{Re}(\xi,\tau), \ \Psi_{\mathrm{Im}}(\xi,\tau)$ - дійсні та уявні частини функцій $Y(\xi,\tau)$ и $\Psi(\xi,\tau)$, котрі самі по собі є розв’язками задачі у разі зовнішніх сил з залежностями від часу у вигляді $\cos\Omega\tau$ та $\sin\Omega\tau$, відповідно

$$Y_{Re}(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kY_k(\xi)\cos\left(\Omega\tau+\theta_k\right),\ Y_{\mathrm{Im}}(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kY_k(\xi)\sin\left(\Omega\tau+\theta_k\right);$$

$$\Psi_{Re}(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Psi_k(\xi)\cos\left(\Omega\tau+\theta_k\right),\quad \Psi_{\mathrm{Im}}(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Psi_k(\xi)\sin\left(\Omega\tau+\theta_k\right). \qquad (22)$$

Переходячи тепер до балки з демпферами і гасниками, відзначимо, що навантаження на балку включає не тільки розподілені і зосереджені зовнішні сили, але також і сили, що діють на балку від демпферів і гасників в місці їх кріплення до балки, а ці сили самі залежать від руху балки. Почнемо з випадку демпфера, в якому виникає сила, пропорційна швидкості руху балки в місці кріплення демпфера (g_f - коефіцієнт в'язкості гаснику):

$$P_f=-g_f\,\partial y/\partial t\,. \qquad (23)$$

У безрозмірних параметрах з урахуванням (10), (19) маємо

$$\widehat{P}_f=-i\,\Omega\,g_f^*Y(\xi_f)\qquad (g_f^*=\frac{c}{E\,A}g_f). \qquad (24)$$

Повна амплітудна функція навантаження на балку, з урахуванням розкладання по власним функціям, має вигляд:

$$q(\xi)=q_e(\xi)-i\,\Omega\,g_f^*\sum_{j=1}^{\infty}\zeta_j\,Y_j(\xi)\delta(\xi-\xi_f)\,. \qquad (25)$$

Вводячи позначення $e_{kj}=i\,\Omega\,g_f^*Y_k\,(\xi_f)\,Y_j(\xi_f)$, отримаємо систему рівнянь для задачі про вимушені коливання БТ з демпфером в'язкого тертя у вигляді:

$$\zeta_k\left[(\omega_k^2-\Omega^2)+i\,\Omega\,\left(\mu^*\omega_k^2+\beta^*\right)\right]+\sum_{j=1}^{\infty}e_{kj}\zeta_j=\int_0^{l/r_0}q_e(\xi)Y_k\,(\xi)\,d\xi\,. \qquad (26)$$

У разі, коли зовнішнє навантаження є зосередженою зовнішньою силою, дана система приймає наступний вигляд:

$$\zeta_k\left[\omega_k^2-\Omega^2+i\,\Omega\,(\mu^*\omega_k^2+\beta^*)\right]+\sum_{j=1}^{\infty}e_{kj}\zeta_j=\widehat{P}Y_k\,(\xi_P)\,. \qquad (27)$$

Таким чином, коефіцієнти розкладання динамічного прогину за власними модами пружної БТ визначаються вже не простими кінцевими формулами, а виходять із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (ЛАР) із симетричною матрицею.

Аналогічно випадку застосування демпфера в'язкого тертя, при постановці ДГК навантаження на балку $q_0(x,t)$ включає також силу від гасника F_a^i (силу інерції гасника). Ця сила визначається з диференційного рівняння, що зв'язує переміщення гасника $y_a(t)\equiv y(x_a,t)$ з переміщеннями точки його кріплення до балки $y_d(t)\equiv y(x_d,t)$. Розв’язок рівняння дає залежність $y_a=h_a y_d$, в даному випадку коефіцієнт динамічності гасника h_a є комплексним числом, що дорівнює

$$h_a=\frac{1+i\,\beta_a^*\widehat{\Omega}}{1-\widehat{\Omega}^2+i\,\beta_a^*\widehat{\Omega}}\ ,\ \ \widehat{\Omega}=\frac{\Omega}{\omega_a},\ \ \beta_a^*=\frac{\beta_a}{m_a\omega_a}.\ \ \omega_a=\sqrt{k_a/m_a}\,, \qquad (28)$$

де m_a, ω_a, k_a и β_a- маса, парціальна частота та коефіцієнти жорсткості і в'язкого

тертя гасника, відповідно. Тоді сила, що передається на балку від гасника, дорівнює:

$$F_a^i = -m_a h_a \frac{d^2 y_d}{d t^2}. \tag{29}$$

Повне зовнішнє навантаження може бути записане у вигляді:

$$q(\xi) = q_e(\xi) + m_a^* h_a \ \Omega^2 \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \, Y_j(\xi_d) \delta(\xi - \xi_d). \tag{30}$$

Аналогічно вводячи позначення $f_{kj} = m_a^* h_a \ \Omega^2 Y_k(\xi_d) Y_j(\xi_d)$, отримаємо систему ЛАР для балки з ДГК:

$$\zeta_k \left[(\omega_k^2 - \Omega^2) + i\Omega\left(\mu^* \omega_k^2 + \beta^*\right)\right] - \sum_{j=1}^{\infty} f_{kj} \zeta_j = \int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_k \, d\xi, \tag{31}$$

із симетричною матрицею

$$A(\Omega) = \begin{pmatrix} (\omega_1^2 - \Omega^2) + i\Omega\left(\mu^* \omega_1^2 + \beta^*\right) - f_{11} & -f_{12} & -f_{13} & \ldots \\ -f_{21} & (\omega_2^2 - \Omega^2) + i\Omega\left(\mu^* \omega_2^2 + \beta^*\right) - f_{22} & -f_{23} & \ldots \\ -f_{31} & -f_{32} & (\omega_3^2 - \Omega^2) + i\Omega\left(\mu^* \omega_3^2 + \beta^*\right) - f_{33}. & \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{32}$$

У разі, коли зовнішнє навантаження є зосередженою силою, прикладеної в точці ξ_P, права частина в (31) замінюється на $\hat{P} Y_k(\xi_P)$.

Таким чином, задача звелась до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (31) з урахуванням виразу для динамічного коефіцієнта h_a (28). Відзначимо, що комплексність h_a призводить до комплексних коефіцієнтів системи (31) навіть у разі пружної балки.

Випадок, коли в певній точці x_M розташована зосереджена маса M, є окремим випадком розглянутої вище балки з ДГК, де сила інерції P_M, діюча в цій точці, дорівнює $P_M = -M \partial^2 y_M / \partial t^2$ ($y_M = y(x_M)$); що відповідає (29) при $h_a = 1$. Відповідно, достатньо замінити f_{kj} у системі (30) на

$$g_{kj} = M^* \Omega^2 Y_k(\xi_M) Y_j(\xi_M), \quad M^* = \frac{M}{\rho A r_0}. \tag{33}$$

У загальному випадку БТ з урахуванням різних прикріплених тіл і пристроїв - мас, демпферів і ДГК - слід додати всі індуковані ними сили до зовнішнього навантаження. Тоді приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\zeta_k \left[(\omega_k^2 - \Omega^2) + i\Omega \ \left(\mu^* \omega_k^2 + \beta^*\right)\right] + \sum_{j=1}^{\infty} \left(e_{kj} - g_{kj} - f_{kj}\right) \zeta_j = \int_0^{l/r_0} q_e(\xi) Y_k \ (\xi) d\xi, \tag{34}$$

де e_{kj}, f_{kj} та g_{kj} визначаються виразами, наведеними раніше. За наявності кількох зосереджених навантажень (наприклад, кілька зосереджених мас), відповідний доданок в (34) замінюється на суму цих сил. У будь-якому випадку, дія зосереджених навантажень, що залежать від руху системи, призводить до сполучення різних власних мод, і в результаті ми маємо справу з пов'язаною системою рівнянь.

У **розділі 3** досліджуються коливання пружної та в’язкопружної балки

Тимошенко без демпферів та динамічних гасників коливань.

В якості допоміжної задачі розглядається задача про вільні коливання БТ, проаналізовано власні частоти і власні форми коливань пружної і в'язкопружної БТ. Для пружної БТ задача про власні коливання розглядалася в багатьох роботах (див., напр., огляд Григолюка Є. І., Селезова І. Т. (1973), статті Anderson R. A, Dolph C. L, Hermann G., для в'язкопружної БТ – робота A. Manevich, Z. Kolakowski (2011)). В розділі наведений короткий аналіз, необхідний для розуміння динаміки БТ з демпферами і ДГК.

Виконано аналіз впливу коефіцієнта зсувної піддатливості χ на власні частоти пружної балки Тимошенко. Зсувна деформація помітно впливає на першу власну частоту досить коротких балок (для L/r_0=30 і більш коротких), а також на вищі форми і частоти балок будь-якої довжини. Зокрема, для L/r_0=10 перша власна частота зменшується на 15-30% (в залежності від значення χ).

Наводиться аналіз власних частот в'язкопружної балки Тимошенко, які є комплексними і залежать від параметра внутрішнього тертя. Дійсна частина комплексної частоти визначає циклічну частоту коливань, уявна частина характеризує згасання власних коливань. Кожна власна частота в'язкопружної БТ з в'язким зовнішнім тертям пов'язана з відповідною власною частотою пружної БТ залежностями, на які не впливають граничні умови.

Також досліджуються змушені коливання пружної та в’язкопружної балки Тимошенко без демпферів та динамічних гасників коливань.

Показано, що при малих частотах збудження (менших першої власної частоти, $\Omega < \omega_1^*$) форми коливань в класичній моделі і моделі БТ мають мало відмінностей і практично збігаються з першої власною формою, а внеском вищих форм можна знехтувати. У разі ж, коли частота зовнішньої сили значно перевищує першу власну і близька до другої власної частоти, облік другої форми є необхідним, бо саме ця форма стає домінуючою. Для частот, що не перевищують помітно третю власну частоту, можна обмежитися тримодовим наближенням.

Аналіз впливу зсувної податливості показав, що зростання значення коефіцієнту зсувної податливості призводить до зміщення резонансу в сторону менших частот і помітного зростання амплітуд при резонансі. У дорезонансній зоні ($\Omega < \omega_1^*$) цей коефіцієнт відносно слабо впливає на результат, за винятком коротких балок. У зарезонансній зоні вплив коефіцієнта зсувної податливості істотно зростає, і класична модель Ейлера-Бернуллі і модель Релея не дають адекватного опису вимушених коливань балки.

У **розділі 4** проводиться чисельний аналіз змушених коливань в’язкопружної балки Тимошенко з демпферами в’язкого тертя.

В якості базової моделі в чисельному аналізі була взята шарнірна балка з відносною довжиною $L/r_0 = 10$, $\tilde{\beta} = 0.1$. Демпфер і зовнішня сила розташовувалися посередині прольоту балки. У цьому випадку досить врахувати тільки одну першу форму в розкладі прогину і побудувати амплітудно-частотну характеристику (АЧХ). Наведені на Рис. 2 графіки показують зниження максимальних коефіцієнтів динамічності завдяки демпферу та ілюструють вплив зсувної податливості - випадок $\chi = 0$ – класична модель балки, $\chi = 3$ – типова балка Тимошенко, $\chi = 10$ – БТ з

підвищеною зсувною податливістю.

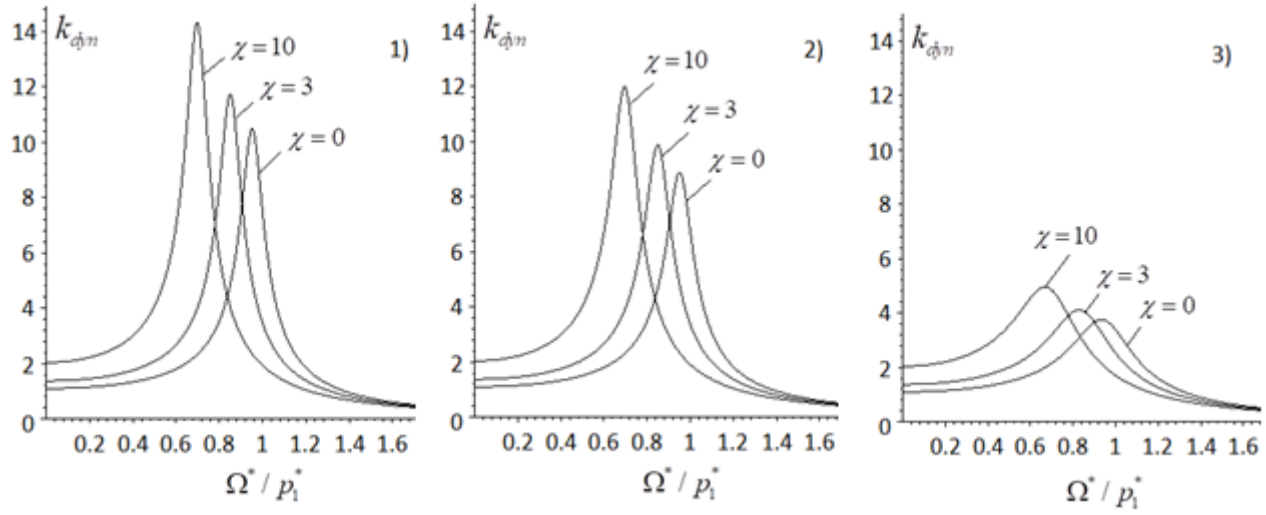


Рисунок 2 – Вплив коефіцієнта тертя у демпфері на АЧХ для різних значень коефіцієнта податливості χ : 1) $\tilde{g}_f^*$=0, 2) $\tilde{g}_f^*$ =0.1, 3) $\tilde{g}_f^*$=1

Збільшення коефіцієнту в'язкого тертя в демпфері призводить до помітного зменшення амплітуд. Відзначимо, що демпфер має істотний вплив на амплітуди коливань лише в околорезонансному діапазоні, але саме такий ефект потрібен на практиці.

У загальному випадку одномодового рішення недостатньо. Окрім схеми симетричного розташування сили і демпфера, був розглянутий і випадок асиметричного розташування демпфера (Рис. 3). Нижче наведені результати розрахунку балки з зазначеними параметрами при обліку трьох мод у розкладанні прогину ($L / r_0 = 10$, $\chi = 3$, $\tilde{\beta} = 0.1$, $\tilde{g}_f^* = 0.1$).

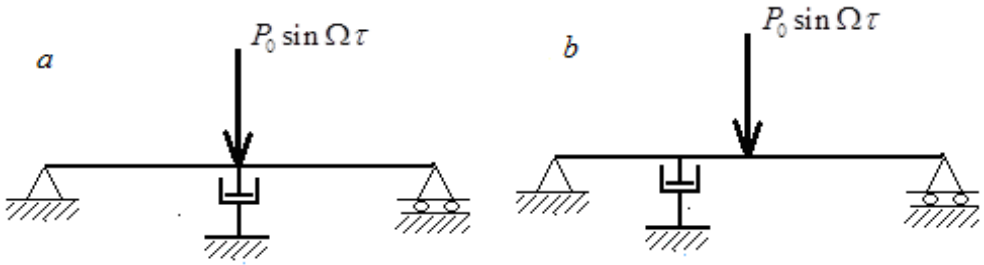
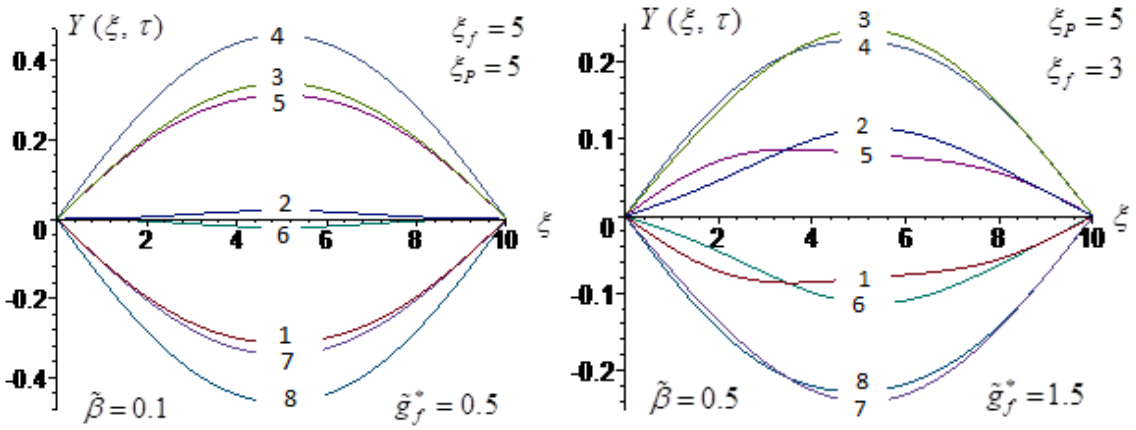


Рисунок 3 - Схеми розташування сили та демпферу

Звертають увагу якісні зміни, що відбуваються при асиметричному розташуванні демпфера та проявляються при врахуванні декількох власних форм в розкладанні прогину. На Рис. 4 показано положення зігнутої вісі балки (L / r_0 =10, $\chi = 3$, $\Omega / p_1 = 1$) $Y(\xi, \tau)$ для восьми рівновіддалених моментів часу: $\Omega^* \tau$ =0; $\pi / 4$; $\pi / 2$; $3\pi / 4 \ldots$, $7\pi / 4$ для двох схем *а* та *б*.

У випадку (*а*) всі криві вигнутої вісі балки є подібними одна одній, абсциса точки максимуму залишається незмінною, а всі точки кривої перетинають вісь абсцис в один і той же момент часу. Отже, динамічний прогин є стоячою хвилею. Для випадку (*б*) така подібність не спостерігається, часові залежності для різних точок різні, точки кривих перетинають вісь абсцис у різні моменти часу. Динамічний прогин представляє собою накладання стоячих і рухомих хвиль.



а *б*

Рисунок 4 - Динамічний прогин балки $Y(\xi,\ \tau)$ для випадку (*a*) (сила та демпфер у центрі балки) та випадку (*b*) асиметричного положення демпфера ($x_d / L = 0.3$) для 8 моментів часу, криві 1-8: 1 - $\Omega^*\tau$ =0; 2 - $\Omega^*\tau = \pi/4$; 3 - $\Omega^*\tau = \pi/2$; 4 - $\Omega^*\tau = 3\pi/4$, 5 - $\Omega^*\tau = \pi$; 6 - $\Omega^*\tau = 5\pi/4$; 7 - $\Omega^*\tau = 3\pi/2$; 8 - $\Omega^*\tau = 7\pi/4$

Ці особливості стають особливо помітними при розрахунку коливань консольної балки. Як і для випадку шарнірної балки, на Рис. 5 спостерігаємо у ряді випадків рухомі хвилі, інтенсивність яких визначається набором таких параметрів, як розташування демпфера і точки прикладання сили, коефіцієнт в'язкого тертя в демпфері, коефіцієнт внутрішнього тертя, а також частота зовнішньої сили.

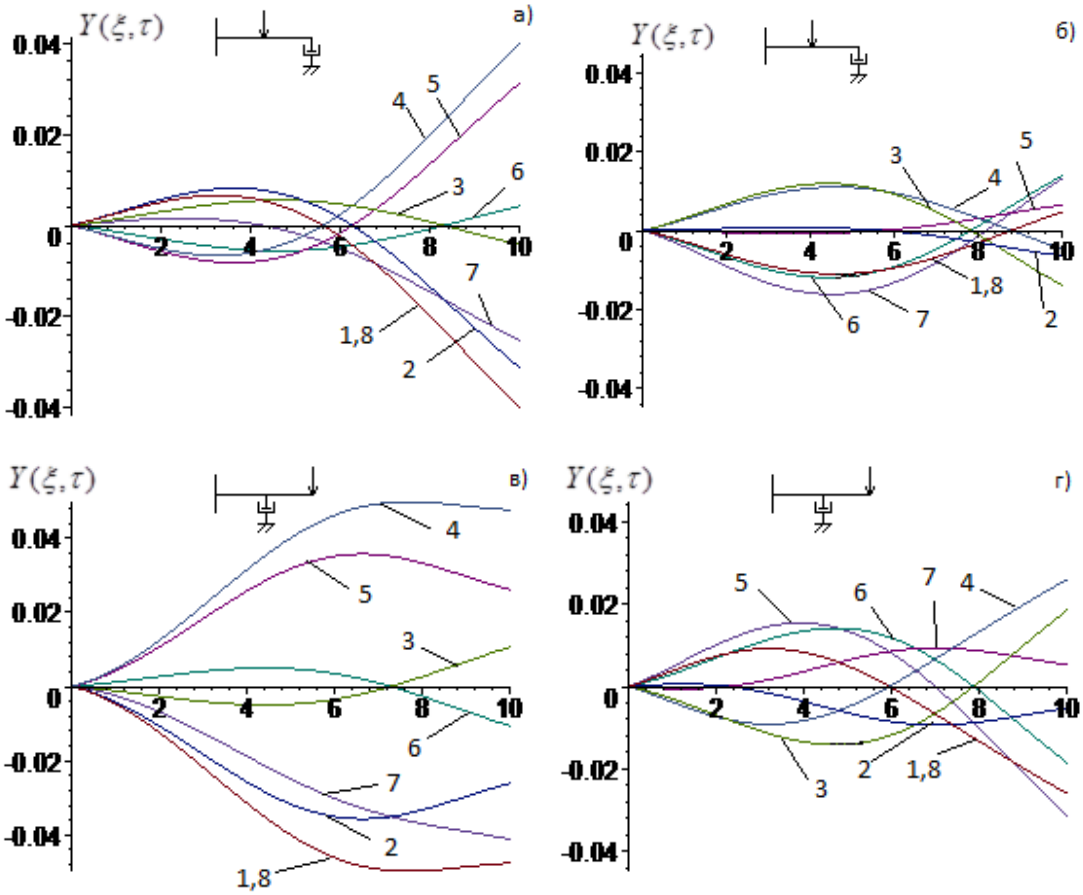


Рисунок 5 – Форми коливань у різні моменти часу для балки Тимошенко з демпфером в'язкого тертя ($L/r_0 = 10,\ \chi = 3,\ \tilde{\beta} = 0.1,\ \tilde{g}^*_f = 0.1$)

На Рис. 5 наведені криві для 8-ми проміжків часу: а) $\tilde{\Omega} = 2.5$, $\xi_f = L/r_0$, $\xi_P = L/2r_0$; б) $\tilde{\Omega} = 5$, $\xi_f = L/r_0$, $\xi_P = L/2r_0$, в) $\tilde{\Omega} = 2.5$, $\xi_f = L/2r_0$, $\xi_P = L/r_0$; г) $\tilde{\Omega} = 5$, $\xi_f = L/2r_0$, $\xi_P = L/r_0$, (1 - $\Omega\tau = 0$, 2- $\Omega\tau = \pi/4$, 3- $\Omega\tau = \pi/2$, 4- $\Omega\tau = \pi$, 5- $\Omega\tau = 5\pi/4$, 6- $\Omega\tau = 3\pi/2$, 7- $\Omega\tau = 7\pi/4$, 8- $\Omega\tau = 2\pi$).

В цьому ж розділі наведено результати експерименту, в якому досліджувались вимушені коливання шарнірно закріпленої балки з демпфером в'язкого тертя, що розташовувався поруч з середнім перетином (під балкою). Демпфер мав вигляд ємності, заповненої рідиною, в якій рухався поршень (стрижень з круглою перфорованою діафрагмою), з'єднаний з балкою (Рис. 6).

Рисунок 6 - Експериментальна установка для вивчення вимушених коливань балки

Розміри балки, що розглядається в експерименті, становили 600 × 49 × 2 (мм). В якості рідини використовувалися вода або гліцерин (мають суттєво різні характеристики в'язкості). Коливання порушувалися вібратором, розташованим в середньому перерізі (над балкою). Поблизу середнього перетину під балкою містився також пристрій, що реєструє амплітуди коливань (електромагнітний датчик). Показання датчика записувалися на осцилограф. Кутова швидкість обертання вібратора і відповідно частота збурення плавно змінювалися в досить широких межах. На частоті, що відповідає першому резонансу, записувалися коливання в середньому перерізі. Визначались параметр внутрішнього тертя в балці μ; коефіцієнт зовнішнього в'язкого тертя в демпфері β для різних рідин; ефективність гасника.

Коефіцієнти в'язкого тертя в демпферах з різними рідинами визначалися в досліді з аналізу вільних коливань маси m на пружині, з'єднаній з тим же демпфером. Типова осцилограма показана на Рис. 7.

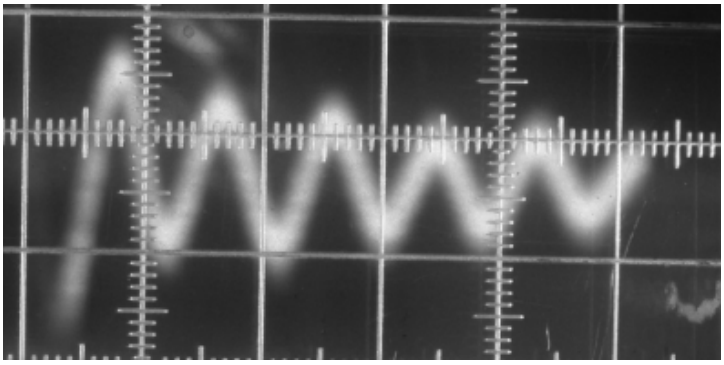


Рисунок 7 - Осцилограма вільних коливань маси з демпфером (гліцерин)

За осцилограмою визначався період коливань T, амплітуди і обчислювався логарифмічний декремент коливань (35) за середнім значенням відносин двох сусідніх амплітуд a_k і a_{k+1}:

$$\eta = ln\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right). \tag{35}$$

Потім визначались параметр тертя $n = \eta / T$ та коефіцієнт $\beta = 2mn$. Були отримані наступні значення коефіцієнтів в'язкого тертя β для демпферів з водою і гліцерином (для даної діафрагми): для води $\beta = 0,27$ *(кг / с)*, для гліцерина $\beta = 1$ *(кг / с)*. Похибка визначення β не перевищувала 5%.

Коефіцієнт внутрішнього тертя в балці μ визначався по вільних коливаннях балки (без демпфера). Типова осцилограма показана на Рис. 8.

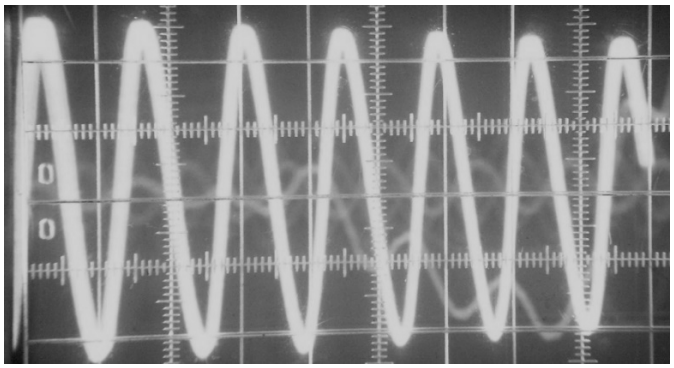
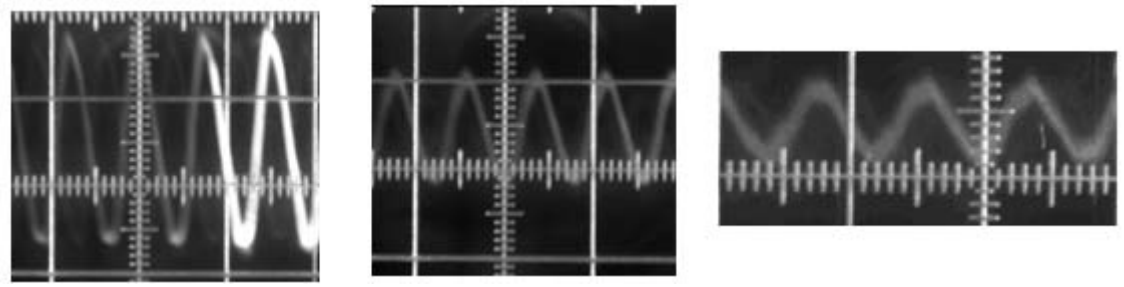


Рисунок 8 - Вільні коливання балки (без демпфера)

Зв’язок логарифмічного декременту та параметра внутрішнього тертя:

$$\mu^* = \omega_1 \mu = \frac{\eta}{\pi}, \text{ де } \mu = \frac{\eta}{\pi\,\omega_1} \tag{36}$$

Осцилограми вимушених коливань балки при першому резонансі для трьох варіантів – (а) балка без демпфера, (б) балка з демпфером, заповненим водою, та (в) балка з демпфером, заповненим гліцерином, приведені на Рис. 9.



а б в

Рисунок 9 - Вимушені коливання балки без демпфера (а), з демпфером (вода) (б) і з демпфером (гліцерин) (в)

Для порівняння розрахункових та експериментальних даних для вимушених коливань балки з демпфером були побудовані амплітудно-частотні характеристики вимушених коливань з використанням значень для коефіцієнтів $\tilde{\mu}$ та $\tilde{\beta}$, що попередньо визначалися в експериментах з вільними коливаннями. Ці АЧХ наведені на Рис. 10 для балки без демпфера та для різних демпферів (вода, гліцерин).

Згідно з розрахунком, застосування в'язкого демпфера на основі гліцерину зменшує максимальні амплітуди коливань приблизно в 6,2 рази, а на основі води ¬-

приблизно в 2,5 рази (для даної балки).

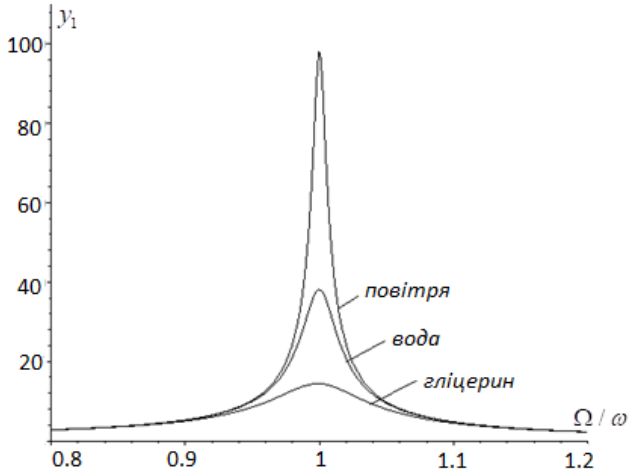


Рисунок 10 - Амплітудно-частотні криві для балки з врахуванням демпфування у різних середовищах

Ці величини задовільно узгоджуються з експериментальними даними (Рис. 9). Розбіжності між експериментальними та теоретичними результатами можуть бути пов'язані як із ефектом Зоммерфельда, що виникав внаслідок малої потужності вібратора, так і зі спрощенням схеми розрахунку (не враховувались зосереджені маси вібратора та реєструючого пристрою).

Отримані експериментальні дані дозволяють зробити висновок щодо ефективності використання демпферів в'язкого тертя для гасіння коливань елементів мостів та інших балочних конструкцій, а також щодо достатньо доброго узгодження теоретичних та експериментальних результатів.

Розділ 5 присвячений чисельному аналізу змушених коливань в'язкопружної балки Тимошенко з динамічними гасниками коливань. Досліджується вплив параметрів балки та ДГК на амплітудно-частотні характеристики та вплив розташування гасника на динаміку вимушених коливань.

В якості базового прикладу була розглянута шарнірно закріплена балка з параметрами $L / r_0 = 10$, $\chi = 3$, $\mu^* = 0.1$. Гасник і сила розташовувалися посередині прольоту балки. Для гасника були прийняті наступні базові параметри: $m^*_a = 0.5$, $\omega^*_a / p_1 = 0.8$, $\beta^*_a = 0.2$. Спочатку було розглянуто одномодове наближення (Рис. 11).

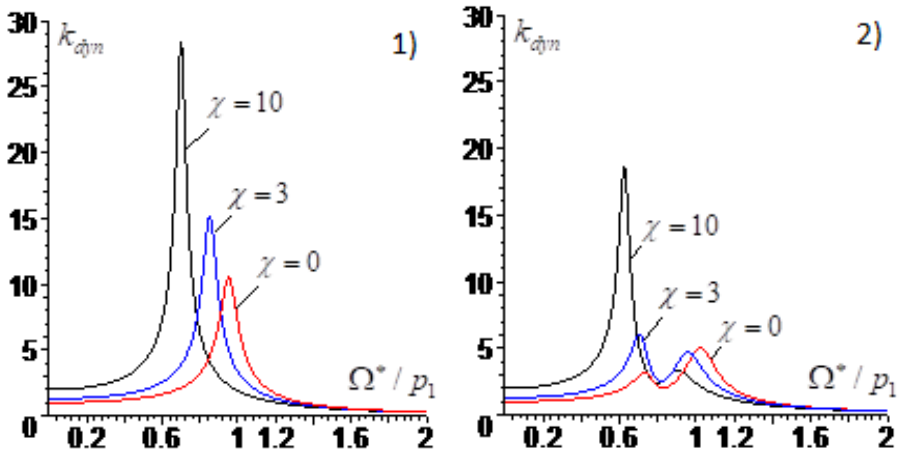


Рисунок 11 - Вплив зсувної податливості χ та гасника на АЧХ в'язкопружної БТ ($L / r_0 = 10$, $\mu^* = 0.1$, $m^*_a = 0.5$, $\omega^*_a / p_1 = 0.8$, $\beta^*_a = 0.2$): 1) балка без ДГК, 2) балка з ДГК

Для одномодового наближення (Рис. 11) був проведений аналіз впливу параметрів гасника на АЧХ. Для балки з ДГК існують два локальних максимуми (поява другого обумовлена додатковим ступенем вільності, що пов'язаний з ДГК). Ефективність ДГК істотно залежить від значення χ, і в моделі Тимошенко амплітуди коливань виявляються вищими, ніж в моделях Ейлера-Бернуллі і Релея. Збільшення χ призводить до збільшення максимуму і зміщення його вліво.

Основними параметрами гасника є параметри маси, тертя та параметр налаштування. Вплив параметра в'язкого тертя гасника ілюструється на Рис. 12 (*a-d)*, де побудовані АЧХ для в'язкопружної БТ ($L/r_0=10$, $\chi=3$, $\mu^*=0.1$) з гасником при різних значеннях параметра тертя в гаснику β_a^*, від $\beta_a^*=0$ до $\beta_a^*=0.7$.

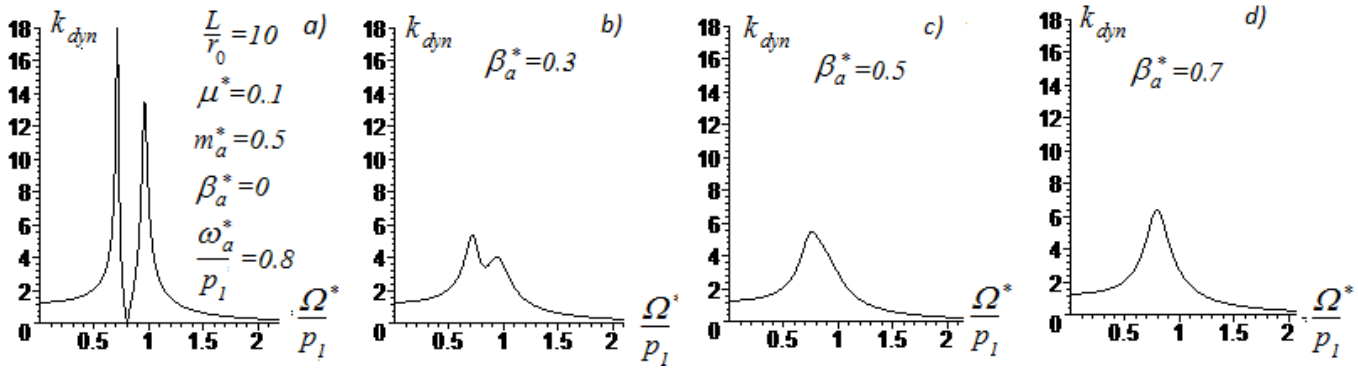


Рисунок 12 - Вплив параметра в'язкого тертя гасника β_a^* на АЧХ в'язкопружної БТ ($L/r_0=10$, $\chi=3$, $\mu^*=0.1$; $m_a^*=0.5$, $\omega_a^*/p_1=0.8$); *a*) $\beta_a^*=0$, *b*) $\beta_a^*=0.3$, *c*) $\beta_a^*=0.5$, *d*) $\beta_a^*=0.7$

При малому терті (графіки *a* - *d*) АЧХ мають два явно виражених максимуму, але зі збільшенням β_a^* вони поступово знижуються і зливаються в один (графік *c*). Подальше збільшення тертя призводить вже до монотонного зростання амплітуд і зменшення ефективності гасника. Максимум АЧХ має найменше значення в діапазоні β_a^* = 0.3 - 0.5 для обраного набору інших параметрів (балки і гасника).

У певному сенсі аналогічна залежність відзначається і при аналізі впливу параметрів налаштування гасника та його маси, який проводився для тих же параметрів балки зі знайденим оптимальним тертям (Рис. 13).

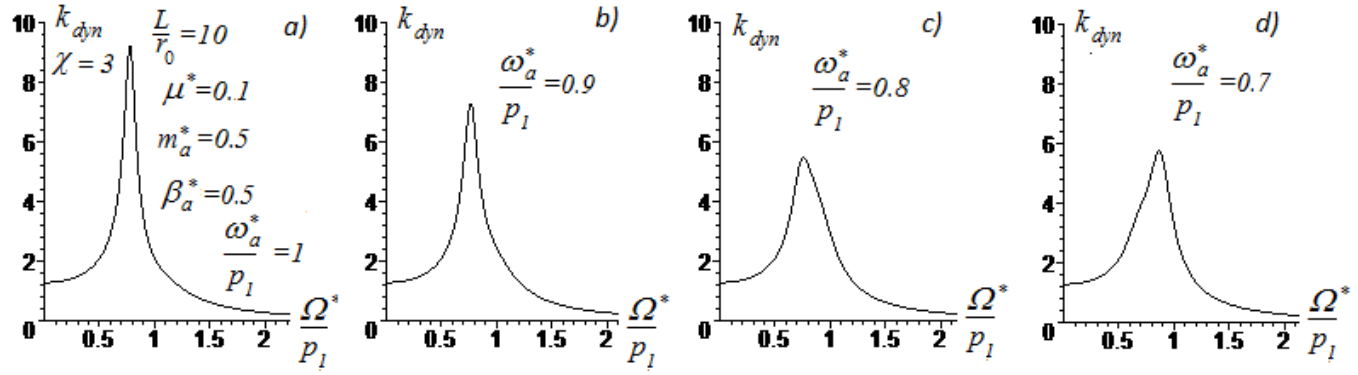


Рисунок 13 - Вплив параметру налаштування гасника ω_a^*/p_1^* на АЧХ БТ ($\chi=3$, $L/r_0=10$, $\mu^*=0.1$, $m_a^*=0.5$, $\beta_a^*=0.5$); *a*) $\omega_a^*/p_1=1$, *b*) $\omega_a^*/p_1=0.9$, *c*) $\omega_a^*/p_1=0.8$, *d*) $\omega_a^*/p_1=0.7$

Для балки Тимошенко з $\chi=3$ при поступовому зменшенні параметру налаштування від 1 (що відповідає випадку, коли парціальна частота гасника

дорівнює 1-й власній частоті пружної балки в класичній моделі) до 0.7 бачимо, що максимальна амплітуда і коефіцієнт динамічності спочатку зменшується, а потім починають зростати. Мінімальне значення k_{dyn} досягається в діапазоні $\omega_a^* / p_1 = 0.8$ - 0.85. Це пов'язане із впливом параметра χ на власні частоти.

Графіки, представлені на Рис. 14, ілюструють вплив параметра маси гасника m_a^* на амплітудно-частотну характеристику для схеми навантаження *a*).

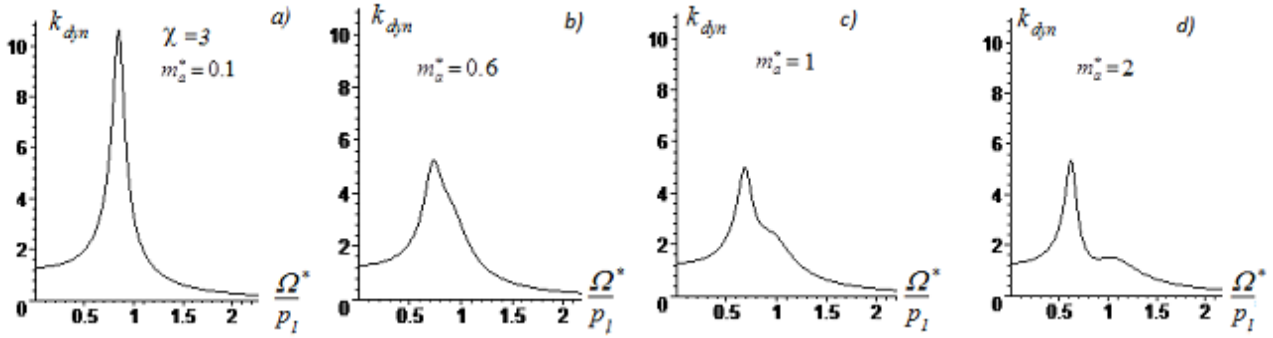


Рисунок 14 - Вплив параметра маси гасника m_a^* на АЧХ балки Тимошенко ($\chi = 3$, $L / r_0 = 10$, $\mu^* = 0.1$, $\omega_a^* / p_1 = 0.8$, $\beta_a^* = 0.5$); *a)* $m_a^* = 0.1$, *b)* $m_a^* = 0.6$, *c)* $m_a^* = 1$, *d)* $m_a^* = 2$

Як і для раніше розглянутих параметрів гасника, тут можна говорити про існування деякого оптимального діапазону значень для даного набору параметрів. Мінімальне значення k_{dyn} досягається в діапазоні $m_a^* = 0.5 \div 1$.

Наведені вище результати відносяться до одномодового рішення, яке, як правило, може бути застосовано на дорезонансній ділянці частот. Для більш високих частот збудження необхідно використовувати кілька власних мод в розкладанні динамічного прогину (20). Були розглянуті дві схеми навантаження балки (*a*) і (*b*) (Рис.15).

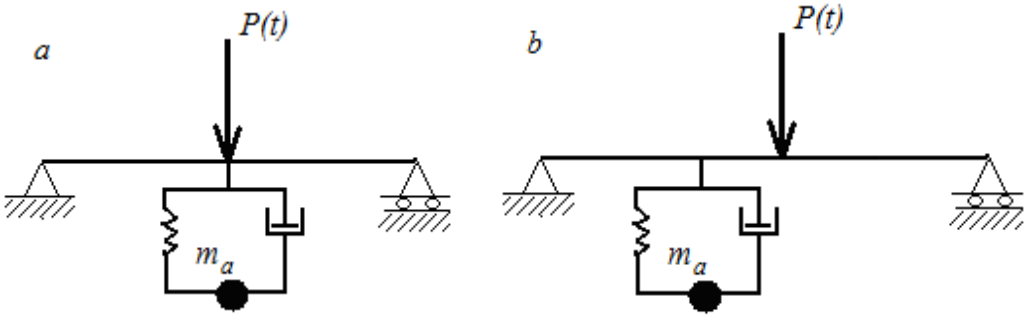
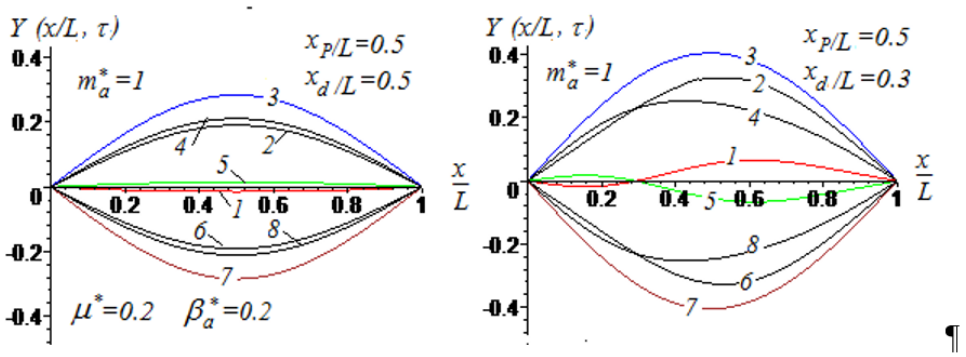


Рисунок 15 - Симетричне та асиметричне розташування гасника

У чисельному аналізі приймалися такі параметри балки і гасника: L / r_0=10, $\chi = 3$, $\mu^* = 0.2$, $\beta_a^* = 0.2$, $\omega_a^* / p_1 = 0.8$, $m_a^* = 1$.

На Рис. 16 представлені форми вимушених коливань - вигнуті осі балки для восьми моментів часу при двох розташуваннях гасника – під місцем дії навантаження в середньому перерізі (Рис. 15, схема *a*), та в довільному місці (Рис. 15, схема *b*). Як і у випадку демпфера в'язкого тертя, бачимо, що асиметричне розташування гасника призводить до того, що динамічний прогин представляє собою накладання стоячої і рухомої хвиль, при цьому ефективність гасника зменшується, а амплітуди коливань збільшуються.



a·····*b*¶

Рисунок 16 - Динамічний прогин балки $Y(x/L,t)$ з ДГК для 8-ми моментів часу: 1 - $\Omega^*\tau = 0$; 2 - $\Omega^*\tau = \pi/4$; 3 - $\Omega^*\tau = \pi/2$; 4 - $\Omega^*\tau = 3\pi/4$, 5 - $\Omega^*\tau = \pi$; 6 - $\Omega^*\tau = 5\pi/4$; 7 - $\Omega^*\tau = 3\pi/2$; 8 - $\Omega^*\tau = 7\pi/4$; *a* - сила і ДГК в центрі; *b* - ДГК зміщений ($x_d/L = 0.3$)

Як зазначалося раніше, максимуми, їх абсциси, співвідношення між складовими динамічного прогину визначаються не тільки розташуванням гасника і сили, але також частотою зовнішньої сили, масою гасника та іншими параметрами налаштування ДГК.

Маючи на увазі баштові конструкції, був розглянутий приклад консольної балки для двох випадків розташування гасника – на кінці та у центрі балки (Рис. 17).

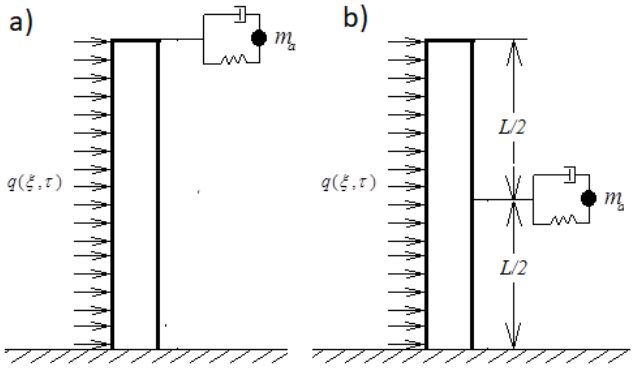


Рисунок 17 - Дві схеми розташування гасника

Спочатку використовувалося одномодове наближення (Рис. 18).

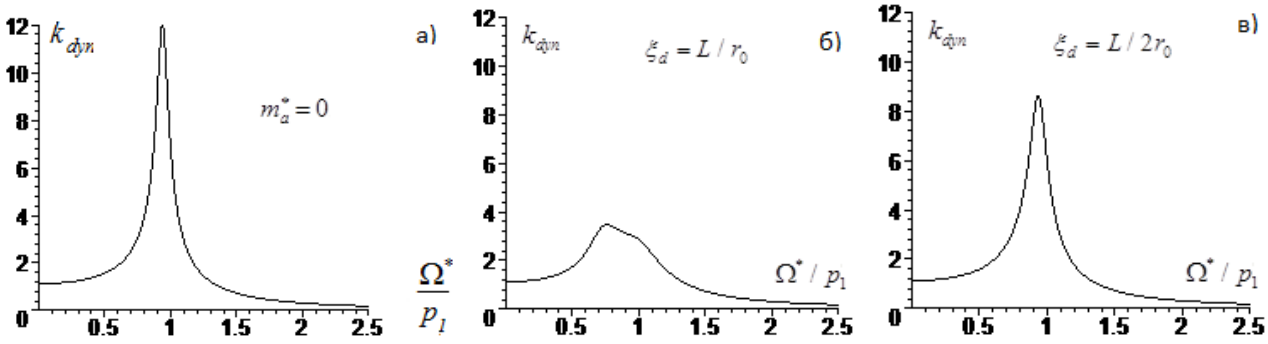
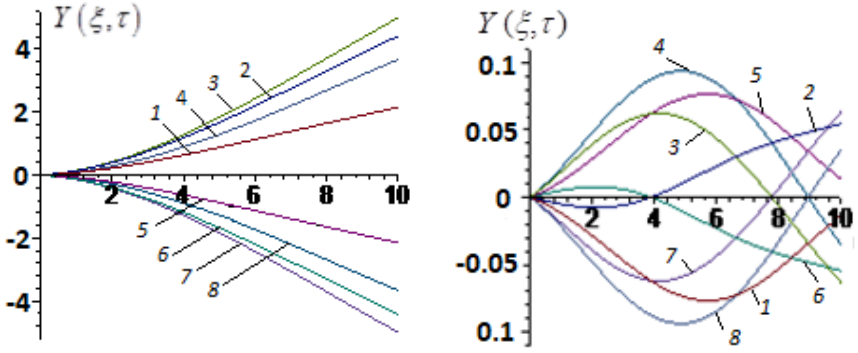


Рисунок 18 - АЧХ БТ (L/r_0=10, $\chi = 3$, $\mu^* = 0.1$) для двох випадків розташування ДГК ($\beta_a^* = 0.6$, $\omega_a^*/p_1 = 0.8$, $m_a^* = 0.5$): а) без ДГК, б) на вільному краї, в) у центрі балки

На Рис. 18 побудовані АЧХ для двох випадків розташування гасника, що відповідають схемам, наведеним на Рис. 17 (*a*, *b*).

Як і слід було очікувати, максимальна ефективність гасника для консольної балки досягається при його розташуванні на кінці балки. При перенесенні гасника в середній перетин балки, максимальна амплітуда коливань зростає більш, ніж в два рази. Потім та сама балка (L/r_0=10, $\chi=3$, $\mu^*=0.1$, $\beta_a^*=0.6$, $m_a^*=0.5$) з гасником на краї ($\xi_d=L/r_0$) розглядалася в рамках тримодового наближення (Рис. 19).



а *б*

Рисунок 19 - Динамічний прогин $Y(\xi,\tau)$ консольної балки з ДГК на кінці ($L/r_0=10$, $\chi=3$, $\mu^*=0.1$, $\beta_a^*=0.6$, $m_a^*=0.5$) для двох частот збудження: *а*) $\tilde{\Omega}=0.8$, *б*) $\tilde{\Omega}=5$

Розглядались два значення частоти збудження - $\tilde{\Omega}=0.8$ і $\tilde{\Omega}=5$ (що близько до 1-ї та 2-ї власних частот в'язкопружної балки з ДГК). Налаштування гасника (параметр ω_a^*/p_k) приймалось відповідно близьким до цих частот – 0.8 і 5.0.

Як і для шарнірної балки, у разі «низької» частоти $\tilde{\Omega}=0.8$ коливання балки близькі до стоячої хвилі (*а*), і тут тримодовий розв'язок практично не відрізняється від одномодового. Але при більш високій частоті збудження $\tilde{\Omega}=5$ (*б*), близькою до другої власної частоти, динамічний режим істотно відрізняється від стоячої хвилі, і компонента рухомої хвилі значно більш виражена, ніж в разі коливань балки без гасників. Одномодовий розв'язок виявляється недостатнім для визначення динамічних переміщень та напружень.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі зроблено теоретичне узагальнення і запропоновано нове рішення науково-практичної задачі проектування будівельних конструкцій, зокрема задачі розрахунку на динаміку та проектування мостових і баштових конструкцій. Задача розв'язувалась за допомогою побудови математичної моделі, для якої було отримано аналітичний розв'язок задачі про коливання балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя і динамічними гасниками коливань. Зазначена модель враховує зсувну податливість та внутрішнє і зовнішнє тертя. Виконані дослідження дозволяють зробити наступні висновки:

1. Побудована математична модель динаміки балки Тимошенко з в'язко-пружного матеріалу з приєднаними точковими масами, демпферами і динамічними гасниками коливань при дії довільного розподіленого навантаження $q_0(x,t)$, з використанням зручної системи безрозмірних змінних та параметрів. Отримано аналітичний розв'язок цієї задачі методом розкладу по власним функціях пружної балки Тимошенко без наведених зосереджених впливів, тобто задача зведена до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно узагальнених

координат – коефіцієнтів вищезгаданого розкладу.

2. Розглянута допоміжна задача про визначення власних частот і власних форм пружної балки Тимошенко, розв’язок якої є необхідним кроком розв’язку загальної задачі про вимушені коливання БТ з демпферами та ДГК. Досліджено форми власних коливань пружної балки, наведено їх порівняння в моделях Тимошенко та Ейлера-Бернуллі, проаналізовано співвідношення згинної та зсувної складових в залежності від коефіцієнта зсувної податливості χ, виконано аналіз впливу коефіцієнта зсувної податливості χ на власні частоти пружної балки. При розгляді допоміжної задачі, виконано аналіз власних частот в’язко-пружної балки Тимошенко, які є комплексними та визначають як циклічну частоту коливань, так і згасання власних коливань.

3. Виконано аналіз вимушених коливань пружної балки Тимошенко (без демпферів та ДГК). Для в’язкопружної балки Тимошенко, так само як і для пружної, внесок власних форм більш високих порядків (вище першого) в динамічний прогин стає помітним при частотах збудження помітно перевищуючих першу власну частоту. Зсувна податливість призводить до зміщення резонансу в сторону менших частот і помітного зростання амплітуд при резонансі. У зарезонансній зоні вплив коефіцієнта зсувної податливості істотно зростає, а класична модель Ейлера-Бернуллі і модель Релея не дають адекватного опису вимушених коливань. У випадку гармонійного навантаження (без демпферів і ДГК) динамічний прогин є накладанням рухомих і стоячих хвиль, через різний зсув фаз компонент прогину, але рухома складова стає помітною лише при великих коефіцієнтах в'язкого тертя. Також досліджені сталі вимушені коливання в'язкопружної балки Тимошенко з демпфером в'язкого тертя при дії гармонійного навантаження. На прикладах шарнірно закріпленої та консольної балок вивчено вплив різних параметрів - коефіцієнта зсувної податливості χ і параметрів демпфера (коефіцієнта в'язкого тертя в демпфері $\tilde{g}_f^*$ і місця його розташування) на форми і амплітуди коливань.

4. Показано, що оптимальне значення коефіцієнта тертя в гасниках пов'язане з «розщепленням» власних частот при установці ДГК. При певному значенні коефіцієнта в'язкого тертя в гаснику відбувається злиття двох близьких локальних максимумів, і саме це значення коефіцієнта і є оптимальним. У розглянутих чисельних прикладах отримані діапазони раціональних безрозмірних параметрів гасника (для шарнірно закріплених та консольних балок). Показано, що постановка демпферів і динамічних гасників коливань підсилює тенденцію до появи рухомих хвиль при вимушених коливаннях балок, особливо при дії локальних сил і зміщених щодо цих сил гасників. Рухома компонента істотно залежить від розташування демпфера або гасника і зростає зі збільшенням частоти збудження. Ця компонента динамічного прогину може привести до істотних змін в кривизні зігнутої осі і відповідно у згинних напруженнях, що має братися до уваги при аналізі динамічних напружень та виборі параметрів ДГК.

5. Результати виконаного автором експериментального дослідження коливань балки з демпфером в'язкого тертя знаходяться в достатній відповідності до теоретичних розрахунків.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, у яких опубліковані основні результати дисертації

1. Демедецкая В. В., Маневич А. И., Пацюк А. Г. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. Дніпропетровськ, 2010. Вип. 14. С. 148 - 160.

2. Демедецкая В. В. Колебания консольной вязкоупругой балки с демпфером вязкого трения и сосредоточенными массами. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2011. Вип. 12. С. 83 - 93.

3. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вынужденные колебания балки с демпферами вязкого трения и сосредоточенными массами. *Theoretical Foundations of Civil Engineering*. *Polish – Ukrainian Transactions*. Warsaw, 2011. Vol. 19. P. 161 - 168.

4. Demedetskaya V., Manevich A. Oscillations of viscoelastic Timoshenko beam with dynamic vibration absorber and concentrated masses. *Statics, Dynamics, Stability of Structures*. Lodz, 2013. Vol.3. Chapter 5. P. 147 - 177.

5. Демедецкая, В. В. Свободные колебания вязкоупругой балки Тимошенко с динамическим гасителем колебаний и сосредоточенными массами. *Вісник Дніпропетровського національного університету. Сер. Механіка*. Дніпропетровськ, 2014. Вип.18(2). №7. С. 66-80.

6. Demedetskaya V., Manevich A. Forced oscillations of a viscoelastic Timoshenko beam with dampers and dynamic vibration absorbers. *Statics, Dynamics, Stability of Structures* : a series of monographs. Lodz, 2016. Vol.5. Chapter 10. P. 233 - 263.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

7. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Динамика вязкоупругой балки Тимошенко с динамическим гасителем колебаний. *Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела*: материалы VII Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика НАН Украины А. С. Космодемьянского (Донецк, 11-14 июня 2013 г.). Донецк, 2013. С. 34 - 38.

8. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вынужденные колебания вязкоупругой балки Тимошенко с гасителем колебаний. Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (Одеса, 16-19 трав. 2017 р.). Одеса, 2017. С. 92 - 96.

9. Демедецкая В. В., Маневич А. И. Вязкоупругая балка Тимошенко с демпферами вязкого трения и динамическими гасителями колебаний. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: матеріали другої міжнародної науково-технічної конференції, присвяченій пам’яті академіка Володимира Івановича Моссаковського (до сторіччя від дня народження) (Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.). Дніпро, 2019. С. 170 - 171.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

10. Демедецкая В. В. Влияние кориолисовых сил инерции на динамику вращающихся балок. *Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла*. Дніпропетровськ, 2008. Вип. 9. С. 72 - 79.

11. Демедецька В. В., Маневич А. І., Пономарьова Л. Ф. Zur Frage der wirtschaftlichen Effektivität bei der Anwendung von Flüssigkeitschwingungsdämpfer. *Актуальні питання сучасної економічної науки та міжнародних відносин*: матеріали

регіональної науково-практичної конференції молодих учених та студентів (Дніпро, 25-26 лист. 2011 р.). Дніпропетровськ, 2011. С. 112 - 113.

АНОТАЦІЯ

Демедецька В.В. **Динаміка в'язкопружної балки Тимошенко з демпферами в'язкого тертя та динамічними гасниками коливань. –** Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.23.17 «Будівельна механіка» (19 – архітектура та будівництво). – Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара; Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури» Міністерства освіти і науки України, Дніпро, 2019.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню згинних коливань балок, оснащених демпферами і динамічними гасниками коливань (ДГК), з використанням некласичної моделі балки, запропонованої Тимошенко (БТ), і моделі в'язкопружного матеріалу Фохта. Використання моделі Тимошенко дозволяє врахувати зсувні деформації і інерцію обертання, що необхідно при розрахунку широкого класу мостових та баштових конструкцій, а облік внутрішнього і зовнішнього тертя дозволяє дати реалістичний опис резонансної динаміки.

Отримано аналітичний розв'язок задачі про вимушені коливання в'язкопружної балки Тимошенко з зазначеними зосередженими впливами (демпферами, ДГК, точковими масами) при дії гармонійного навантаження з використанням розкладання за власними функціями пружної балки Тимошенко без цих впливів. Задача зведена до вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами щодо узагальнених координат - коефіцієнтів зазначеного розкладання.

Постановка демпферів і динамічних гасників коливань підсилює тенденцію до появи рухомих хвиль при вимушених коливаннях балок, особливо при дії локальних сил і зміщених щодо цих сил гасників. Рухома компонента істотно залежить від розташування демпфера або гасника і зростає зі збільшенням частоти збудження. Ця компонента динамічного прогину може привести до істотних змін в кривизні зігнутої осі і відповідно в згинних напруженнях, що має братися до уваги при аналізі динамічних напружень та виборі параметрів ДГК.

Ключові слова: балка Тимошенко, в'язкопружний матеріал, динамічний гасник коливань, демпфер в'язкого тертя, вимушені і вільні коливання, резонанс, рухомі хвилі.

Аннотация

Демедецкая В. В. **Динамика вязкоупругой балки Тимошенко с демпферами вязкого трения и динамическими гасителями колебаний. –** Квалификационная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание научной степени кандидата технических наук по специальности 05.23.17 «Строительная механика» (19 – архитектура и строительство). – Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара; Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная

академия строительства и архитектуры» Министерства образования и науки Украины, Днепр, 2019.

Диссертационная работа посвящена исследованию изгибных колебаний балок, оснащённых демпферами и динамическими гасителями колебаний (ДГК), с использованием неклассической модели балки, предложенной Тимошенко (БТ), и модели вязкоупругого материала Фохта. Эта задача имеет прикладное значение, в частности, в связи с проблемой гашения колебаний мостовых и башенных сооружений. Использование модели Тимошенко позволяет учесть сдвиговые деформации и инерцию вращения, что необходимо при расчёте широкого класса мостовых и башенных конструкций, а учёт внутреннего и внешнего трения позволяет дать реалистичное описание резонансной динамики.

Составлена математическая модель вынужденных колебаний балки Тимошенко из вязкоупругого материала с присоединёнными сосредоточенными массами, демпферами и динамическими гасителями колебаний при действии произвольной распределенной нагрузки $q_0(x,t)$, использующая удобную систему безразмерных переменных и параметров.

Основная трудность решения состоит в том, что при колебаниях вязкоупругих балок и балок с сосредоточенными воздействиями переменные в уравнениях колебаний не разделяются (в действительной форме), в отличие от классических задач для упругих балок. Однако при решении задачи в комплексной форме пространственная и временная переменные разделяются.

Получено аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях вязкоупругой балки Тимошенко с указанными сосредоточенными воздействиями (демпферами, ДГК, точечными массами) при действии гармонической нагрузки с использованием разложения по собственным функциям упругой балки Тимошенко без этих воздействий. Задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами относительно обобщённых координат – коэффициентов указанного разложения.

Исходя из выбранного подхода, рассмотрена также вспомогательная задача определения собственных частот и собственных форм упругой балки Тимошенко. Изучены формы собственных колебаний упругой балки, дано их сравнение в моделях Тимошенко и Эйлера-Бернулли. Выполнен анализ собственных частот вязкоупругой балки Тимошенко, которые являются комплексными и определяют как циклическую частоту колебаний, так и затухание свободных колебаний. Показано, что каждая собственная частота вязкоупругой БТ (с линейно - вязким внешним трением) связана с соответствующей собственной частотой упругой БТ простой аналитической зависимостью, независимо от граничных условий.

Выполнен анализ вынужденных колебаний вязкоупругой балки Тимошенко (без демпферов и ДГК). Для вязкоупругой балки Тимошенко, так же как и для упругой, вклад собственных форм более высоких порядков (выше первой) в динамический прогиб становится заметным при частотах возмущения, заметно превышающих первую собственную частоту. В дорезонансной зоне коэффициент сдвиговой податливости относительно слабо влияет на результат, за исключением коротких балок. В случае, когда частота внешней силы значительно превышает первую собственную, учёт более высоких форм и сдвиговой податливости

необходим. Сдвиговая податливость приводит к смещению резонанса в сторону меньших частот и заметному возрастанию амплитуд при резонансе. В зарезонансной зоне влияние коэффициента сдвиговой податливости существенно возрастает, и классическая модель Эйлера-Бернулли и модель Рэлея не дают адекватного описания вынужденных колебаний.

Показано, что динамический прогиб представляет собой наложение бегущей и стоячей волн из-за разности в сдвиге фаз компонент прогиба, но бегущая составляющая заметна лишь при больших коэффициентах вязкого трения.

Выполнен анализ установившихся вынужденных колебаний вязкоупругой балки Тимошенко с демпферами вязкого трения и динамическими гасителями колебаний при действии гармонической нагрузки. В одномодовом приближении (применимом при частотах, не превышающих заметно первую собственную частоту) влияние демпфера можно свести к увеличению эффективного коэффициента вязкого трения балки. На примерах шарнирной и консольной балок изучено влияние различных параметров - коэффициента сдвиговой податливости и параметров демпфера (коэффициента вязкого трения в демпфере и места его расположения) на формы и амплитуды колебаний.

В численном анализе изучено влияние ДГК на вынужденные колебания шарнирно опёртых и консольных балок. Показано, что оптимальное значение коэффициента трения в гасителе связано с «расщеплением» собственных частот при установке ДГК. При определённом значении коэффициента вязкого трения в гасителе происходит слияние двух близких локальных максимумов, и именно это значение коэффициента трения в гасителе является оптимальным. В численных примерах получены оценки диапазонов рациональных безразмерных параметров гасителя (для шарнирно опёртых и консольных балок).

Постановка демпферов и динамических гасителей колебаний усиливает тенденцию к появлению бегущих волн при вынужденных колебаниях балок. Бегущая компонента существенно зависит от расположения демпфера или гасителя и возрастает с увеличением частоты возбуждения. Эта компонента динамического прогиба может привести к существенным изменениям в кривизне изогнутой оси и соответственно в изгибных напряжениях, что должно приниматься во внимание при анализе динамических напряжений и выборе параметров ДГК.

Приведены результаты выполненного автором экспериментального исследования влияния демпфера вязкого трения на вынужденные колебания балки, в котором получено удовлетворительное согласие с расчётными данными.

Ключевые слова: балка Тимошенко, вязкоупругий материал, динамический гаситель колебаний, демпфер вязкого трения, вынужденные и свободные колебания, резонанс, бегущие волны.

Annotation

Demedetska V.V. **Dynamics of a viscoelastic Timoshenko beam with dampers and dynamic vibration absorbers. -** Manuscript**.**

The thesis for the scientific degree of a candidate of technical sciences (doctor of philosophy) in speciality 05.23.17 “Structural Mechanics” (19 – architecture and constructing). – Oles Honchar Dnipro National University; State Higher Educational

Establishment “Prydniprovs’ka State Academy of Civil Engineering and Architecture”, Dnipro, 2019.

The thesis is devoted to studying bending vibrations of beams equipped with dampers and dynamic vibration absorbers (DVA), using a non-classical beam model, proposed by S.P. Timoshenko (TB) and Focht model of viscoelastic material. Using the Timoshenko model allows to consider shear deformations and inertia of rotation, that is necessary for consideration for a wide class of bridge and tower structures. Taking into account internal and external friction allows one to give a realistic description of the beam dynamics near the resonance. A mathematical model of forced oscillations of Timoshenko beam made from a viscoelastic material with attached masses, dampers and dynamic vibration dampers, under arbitrary distributed load $q_0(x,t)$ is obtained using a convenient set of dimensionless variables and parameters.

An analytical solution was obtained for the problem of forced oscillations of a viscoelastic Timoshenko beam with the concentrated effects (dampers, DVAs, point masses) under the action of a harmonic load using an expansion in eigenfunctions of Timoshenko's elastic beam without these effects. The problem is reduced to solving a system of linear algebraic equations with complex coefficients with respect to generalized coordinates - coefficients of the indicated expansion.

Applying dampers and dynamic vibration absorbers intensifies the tendency for the occurrence of running waves at forced oscillations of beams, especially under the action of local forces and dampers displaced with respect to these forces. The running component significantly depends on the location of the damper or DVA and increases with increasing excitation frequency. This component of dynamic deflection can lead to significant changes in the curvature of the bent axis and, accordingly, in bending stresses, which should be considered when analyzing dynamic stresses and choosing DVA parameters.

Key words: Timoshenko beam, viscoelastic material, dynamic vibration damper, viscous friction damper, forced and free vibrations, resonance, running waves.